دوفصلنامه بازی جنگ، سال دوم، شماره ۴، بهار و تابستان ۱۳۹۸

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱/۲۸

از صفحه ۶۹ تا صفحه ۸۲

بازی‌های سرهنگ بلاتو و سرهنگ ریچارد

کامبیز امیری[۱]، حمید بیگدلی

گروه بازی جنگ پژوهشکده عالی جنگ [۱]

Email: kamamiri67@gmail.com

چکیده

بازی جنگ یکی از روش‌های آموزش تصمیم‌سازی و تصمیم‌گیری برای فرماندهان نظامی است. نظریه بازی به عنوان یکی از فنون بازی جنگ در مدل‌سازی مسائلی با موقعیت‌های تضاد و تعارض مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف این مقاله آشنایی خوانندگان با بازی‌های سرهنگ بلاتو و سرهنگ ریچارد است. در این بازی‌ها دو فرمانده آبی و قرمز در حال رقابت در یک موقعیت نبرد در چندین جبهه هستند. تخصیص مناسب نیروها طبق قواعد بازی توسط بازیکنان، موجب پیروزی در بازی خواهد شد. پس از معرفی نسخه مقدماتی از بازی سرهنگ بلاتو به نوع خاصی از این بازی با عنوان بازی سرهنگ ریچارد پرداخته شده و روش حل آن ارائه گردیده است.

واژگان کلیدی: نظریه بازی، بازی سرهنگ بلاتو، بازی سرهنگ ریچارد، بازی جنگ.

نویسنده مسئول*

۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی تصمیمات اتخاذ شده توسط یک فرد وابسته به تصمیم فرد یا افراد دیگر است. تصمیم‌گیرندگان در سازمان‌های عمومی و مدیریتی اغلب با مسائل تصمیم‌گیری تحت تضاد یا رقابت مواجه می‌شوند. زیرا راهبردهایشان را به طور مستقل یا با یک توافق دوجانبه انتخاب می‌کنند و لذا عایدی‌های آنها تحت تاثیر تصمیمات دیگران است. نظریه بازی وسیله‌ای قدرتمند برای تحلیل این گونه مسائل است. در حقیقت نظریه بازی از روش‌های ریاضی برای تحلیل تصمیم‌گیری‌ها در شرایط تضاد استفاده می‌کند. هدف نظریه بازی تعیین رفتار بازیکن (تصمیم‌گیرنده) است به طوری که منافع بازیکن در مقابل راهبرد حریف بهینه شود. بنابراین مجموعه جواب‌ها را به صورت راهبردهایی برای بازیکنان مشخص می‌کند و به دنبال تعیین راهبردی است که بهترین عایدی را در مقابل تصمیم حریف نتیجه دهد. انتشار کتاب ارزشمند وان نیومن و مورگنسترن در سال ۱۹۴۴ موجب جذب محققان بیشتری در این زمینه شد و در حقیقت این کتاب به عنوان اساس نظریه بازی‌ها تلقی می‌شود.

سرهنگ الیور هایوود در مقاله‌ی خود اهمیت نظریه بازی را در تصمیم‌گیری فرماندهی نشان داد. او نبردهای مختلفی از جنگ جهانی دوم را از دید نظریه بازی بررسی کرد و نتیجه گرفت که تصمیم دکترین نظامی مشابه با جواب به دست آمده از نظریه بازی است. ارزیابی سرهنگ هایوود انجمن تحقیق در عملیات را تشویق کرد تا روش‌های نظریه بازی را بیشتر مورد بررسی قرار دهند و در تصمیم‌گیری‌های نظامی از این نظریه استفاده کنند. در دهه‌ی اخیر نظریه بازی به طور گسترده در مسائل نظامی و امنیتی مورد استفاده قرار گرفته است . سناریوهای دزد و پلیس، امنیت شبکه‌های کامپیوتری ، سیستم دفاع موشکی ضدبالستیک و تروریسم ازجمله‌ی این کاربردها هستند. اخیراً اقدامات کاربردی در زمینه بازی امنیتی در کشور آمریکا و در شهرهای لس آنجلس و نیویورک صورت گرفته است. نظریه‌ی بازی به دو نوع بازی مهم طبقه‌بندی می‌شود: بازی‌های همکارانه و بازی‌های غیر همکارانه . نویسنده با کمک همکارانش در کارهای قبلی بازی‌های ماتریسی و دوماتریسی را در محیط فازی مورد بررسی قرار داد و موقعیت آورانشه در جنگ جهانی دوم را به صورت یک بازی ماتریسی با عایدی‌های فازی مدل‌سازی کرده و نشان دادند که راهبردهای به دست آمده از روش پیشنهادی با تصمیم دکترین آمریکا مطابقت دارد. همچنین بازی مذاکرات هسته‌ای بین دو کشور را به صورت یک بازی دوماتریسی چندهدفی مدل‌سازی کرده و یک روش برای محاسبه‌ی نقاط تعادل کارای ضعیف آن ارائه شد. بازی‌های امنیتی در محیط فازی مورد مطالعه قرار داده شد و روش حل و کاربردی از آن را در دنیای واقعی ارائه گردید.

۲-مفاهیم مقدماتی

عناصر اصلی در هر بازی عبارتند از

۱- بازیکنان: فرد یا گروهی از تصمیم گیرندگان که ممکن است شخص، شرکت، کشور و ... باشند.

۲- قواعد بازی: شامل اطلاعاتی مانند زمان حرکت بازیکنان، انتخاب‌های بازیکنان و اطلاعات یک بازیکن در زمان حرکت است.

۳- خروجی‌ها: شامل اتفاقات حاصل از انتخاب بازیکنان می‌باشد. به عبارت دیگر مجموعه‌ای است که از ضرب دکارتی مجموعه‌های راهبردهای بازیکنان به دست می‌آید.

۴- عایدی‌ها: مقدار دریافتی بازیکنان با رخداد هر خروجی است.

با توجه به گستره‌ی مسائل بازی، طبقه‌بندی‌های متفاوتی از بازی‌ها وجود دارد. عمده‌ترین تقسیم بندی براساس همکاری و عدم همکاری بازیکنان است. بازی‌های همکارانه بازی‌هایی هستند که در آنها چند بازیکن علیه دیگری متحد می‌شوند و تشکیل ائتلاف می‌دهند. هدف آنها بالا بردن دریافتی ائتلاف و تقسیم عادلانه‌ی عایدی به دست آمده بین بازیکنان ائتلاف است. در بازی‌های غیرهمکارانه معمولاً بین بازیکنان هیچگونه همکاری وجود ندارد و بازی کاملا رقابتی است. البته در برخی از این مسائل ممکن است همکاری جزئی بین بازیکنان وجود داشته باشد ولی در نهایت راهبردها به صورت مستقل انتخاب می‌شوند. همچنین در بازی‌های همکارانه نیز می‌توان ائتلاف‌ها را به صورت جداگانه در نظر گرفته و بازی را به صورت غیرهمکارانه بررسی کرد.

بازی با مجموع صفر از نوع بازی‌های غیرهمکارانه و کاملا رقابتی است. یک بازی با مجموع صفر دو نفره به صورت سه تایی $G = (X, Y, A)$ نمایش داده می‌شود که در آن X و Y فضاهای راهبردهای آمیخته برای بازیکنان ۱ و ۲ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\right\},$$
$$Y = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ \ y_j \geq 0, j = 1, \dots, n\right\}.$$

$A = [a_{ij}]$ را ماتریس عایدی بازی گوئیم.

لازم به ذکر است که راهبردهای $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$ را به ترتیب راهبردهای محض بازیکنان ۱ و ۲ می‌نامند.

فرض می‌شود که بازیکن ۱ به دنبال بیشینه‌سازی عایدی و بازیکن ۲ در پی کمینه‌سازی زیان است. در صورتی که رابطه زیر برقرار باشد در این حالت گوییم بازی نقطه زینی ندارد.

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$$

زمانی که بازیکن ۱ راهبرد آمیخته‌ی $x \in X$ و بازیکن ۲ راهبرد آمیخته‌ی $y \in Y$ را انتخاب می‌کنند، اسکالر $x^T Ay$ عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ خواهد بود و طبیعتاً $-x^T Ay$ عایدی بازیکن ۲ می‌باشد. نیومن[1] نشان داد که در بازی‌های با مجموع صفر دو نفره داریم:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T Ay = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T Ay$$

زوج راهبردهای (x^*, y^*) که در رابطه‌ی فوق صدق کنند را یک جواب تعادل (نقطه تعادل) می‌نامیم.

۳-بازی سرهنگ بلاتو

بازی سرهنگ بلاتو یکی از بازی‌های مشهور در نظریه بازی است. در این بازی دو فرمانده آبی و قرمز در حال رقابت در یک نبرد با تعداد مشخصی از جبهه‌های نبرد هستند. هر فرمانده در مورد اینکه چگونه نیروهای خود را به هر یک از جبهه‌ها تخصیص دهد، تصمیم‌گیری می‌کند. در هر جبهه فرماندهی که نیروهای بیشتری مستقر کرده باشد برنده است. عایدی بازی برای هر فرمانده براساس تعداد جبهه‌هایی است که در آن‌ها برنده شده است.

اکنون با یک مثال مسئله را شرح می‌دهیم. فرض کنید هر یک از دو بازیکن آبی و قرمز ۱۰ سرباز داشته باشند که قرار است به ۵ جبهه تخصیص داده شوند. عایدی یک بازیکن برابر است با تعداد جبهه‌های برنده شده منهای تعداد جبهه‌هایی که شکست می‌خورد. این بازی تعادل راهبرد محض ندارد. تخصیص یکسان سربازان در همه ۵ جبهه می‌تواند به شکست منجر شود. فرض کنید بازیکن آبی به هر جبهه دو سرباز تخصیص دهد. در این صورت بازیکن قرمز می‌تواند ۳ سرباز به هر ۳ جبهه اول و یک سرباز به چهارمی تخصیص دهد و برنده بازی شود.

(به صورت نمایش داده شده در جدول زیر)

بازیکن	جبهه۱	جبهه۲	جبهه۳	جبهه۴	جبهه۵
بازیکن آبی	۲	۲	۲	۲	۲
بازیکن قرمز	۳	۳	۳	۱	۰
برنده	بازیکن قرمز	بازیکن قرمز	بازیکن قرمز	بازیکن آبی	بازیکن آبی

اگر بازیکن آبی دو سرباز از میدان دوم به میدان سوم بفرستد، راهبرد بازیکن قرمز نیز به راحتی شکست می‌خورد. اگرچه این بازی تعادل راهبرد محض ندارد ولی تعادل راهبرد آمیخته بسیاری دارد.

[1] Neumann

مهم است توجه داشته باشید که حتی نسخه‌های ساده بازی بلاتو ابعاد راهبرد پیچیده‌ای دارند. در جدول زیر تعداد راهبردهای ممکن برای نسخه‌های ساده بلاتو ارائه شده است.

تعداد راهبردها	تعداد جبهه‌ها	تعداد سربازان
۷	۲	۶
۹۱	۳	۱۲
۲۹۲۵	۴	۲۴
۳۱۶۲۵۱	۵	۵۰
بیش از ۲۵۰ میلیون	۶	۱۲۰

تعاریف مختلفی از بازی بلاتو به صورت بازی‌های مجموع صفر و ناصفر توسط نویسندگان مختلف ارائه شده است. در اینجا تعریف زیر از مرجع [۱۴] بیان می‌شود.

تعریف: بازی بلاتو $B(x_1, x_2, n)$ یک بازی تک زمانی بین دو بازیکن آبی و قرمز با بردار راهبردهای $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ و $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)$ است، که در آن تابع عایدی بازیکن آبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_1(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2)$$

که

$$f_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & x_1^i > x_2^i \\ 0 & x_1^i < x_2^i \\ 0.5 & x_1^i = x_2^i \end{cases}$$

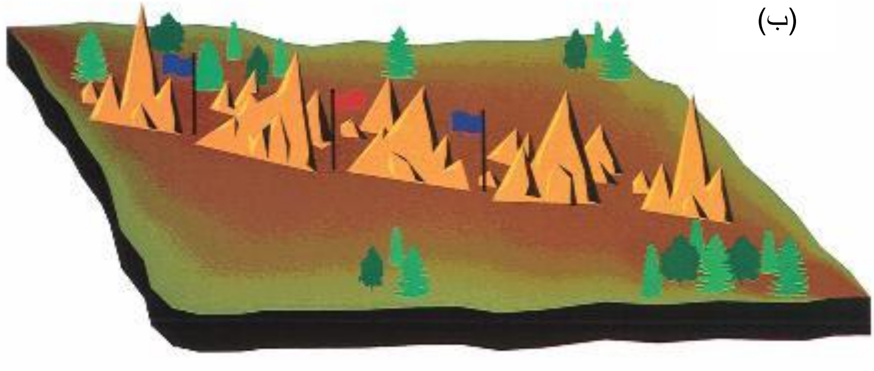
و تابع عایدی بازیکن قرمز $p_2(x_1, x_2)$ برابر $n - p_1(x_1, x_2)$ است.

یک بازیکن در صورتی برنده بازی است که امتیازش از امتیاز حریف بالاتر باشد.

به عنوان یک مثال از بازی سرهنگ بلاتو، دو نیروی آبی و قرمز را به ترتیب با ۴ و ۳ نیرو در یک موقعیت نبرد با ۴ معبر به صورت نمایش داده شده در قسمت (الف) شکل ۱ در نظر بگیرید. فرض کنید فرمانده آبی و قرمز نیروهایشان را به صورت نمایش داده شده در شکل ۱ (قسمت ب) تخصیص دهند. با توجه به قواعد بازی بلاتو نیروی آبی در دو معبر و نیروی قرمز در یک معبر برنده بازی خواهند بود و معبر چهارم برنده‌ای نخواهد داشت. این نتیجه در قسمت (پ) شکل ۱ نمایش داده شده است. لذا امتیاز بازیکن آبی $2 - 1 + 0 = 1$ و امتیاز بازیکن قرمز -1 خواهد بود.

(الف)

(ب)



(پ)

شکل۱: نمایش بازی سرهنگ بلاتو

۴-بازی سرهنگ ریچارد

حل بازی سرهنگ ریچارد پیچیده‌تر است. این مقاله یک نسخه مقدماتی از این بازی را ارائه می‌دهد که از مرجع بیان می‌شود.

قواعد

دو نیرو در یک نبرد درگیر می‌شوند: سرهنگ ریچارد، فرمانده آبی، موشک‌هایی را به پایگاهی که در دفاع کاپیتان کیج (فرمانده قرمز) است شلیک می‌کند. پایگاه که نزدیک یک ساحل قرار داده شده است و توسط راداری حفاظت می‌شود قادر است موشکهای آبی را شناسایی و رهگیری کند. اگرچه، آبی دارای یک کشتی کوچک حمله رادار[1] است که از آن می‌توان موشک‌هایی به رادار برای غیرفعال کردن آن شلیک کرد. قرمز تلاش می‌کند با تخصیص رهگیرها برای خنثی کردن موشک های آبی از حسگر محافظت کند. در ادامه درگیری با رادار سرهنگ ریچارد موشک‌های باقی مانده از یک کشتی پایگاه – حمله[2] به پایگاه قرمز شلیک می‌کند و این موشک‌ها با رهگیرهای باقی مانده قرمز مواجه می‌شوند.

دو مرحله نبرد با قواعد زیر انجام می‌شود:

مرحله۱: سایت رادار. برخی (یا هیچ یک) از موشک‌های آبی برعلیه رادار پرتاب می‌شوند که با برخی (یا هیچ یک) از رهگیرهای قرمز دفاع خواهند شد. اگر تعداد موشک‌های مهاجم از تعداد رهگیرهای دفاعی تجاوز کند رادار تخریب می‌شود، در غیراین‌صورت بدون آسیب باقی می‌ماند. شکل ۲ (قسمت الف) موقعیت قبل از شروع درگیری را نشان می‌دهد و شکل ۲ (قسمت ب) حمله به رادار را نمایش می‌دهد.

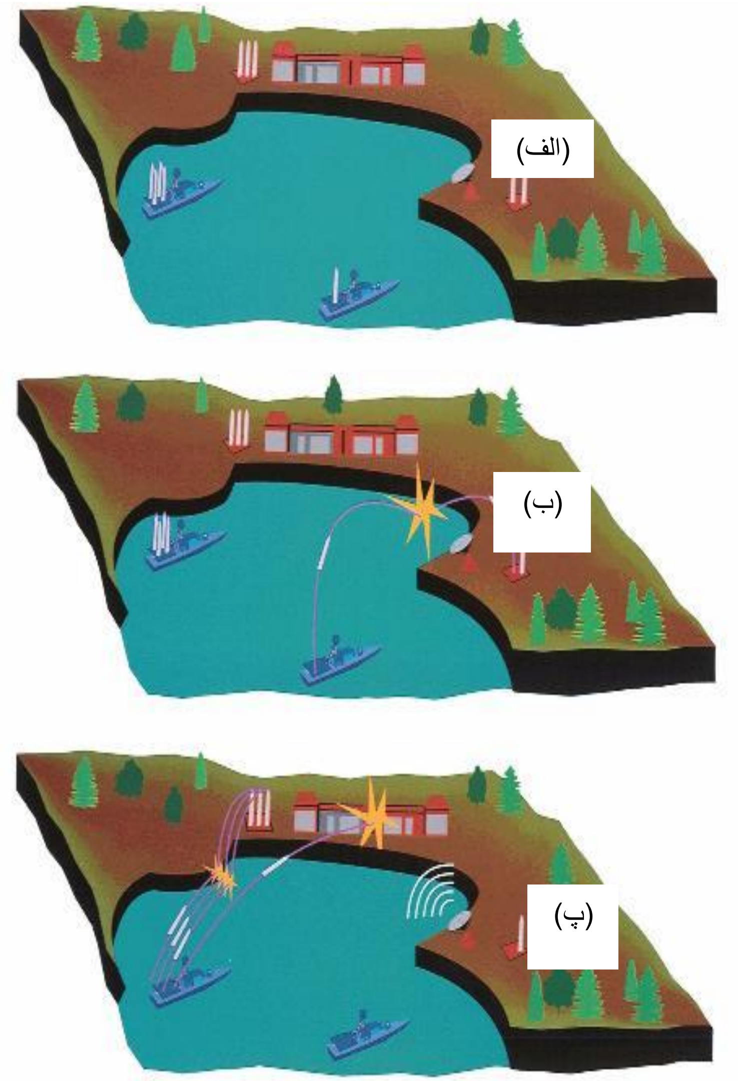
مرحله۲: سایت پایگاه**.** موشک‌های باقی مانده آبی به طرف پایگاه پرتاب می‌شوند و توسط رهگیرهای باقی مانده قرمز دفاع می‌شوند. اگر رادار در مرحله اول از دست برود تمام موشک‌ها

به هدف خود می‌رسند. اگر رادار هنوز عملیاتی باشد، هر رهگیر قرمز یک موشک آبی را خنثی می‌کند و تنها موشک‌های اضافه، اگر وجود داشته باشند، به هدفشان می‌رسند. شکل ۲ (پ) حمله به پایگاه را نشان می‌دهد.

---

[1] RAB

[2] BAB



قواعد زیر برای نبرد به کار می‌رود.

تخصیص: سرهنگ ریچارد می‌تواند موشک‌های خود را بین رادار و پایگاه به هر طریقی تقسیم کند ولی موشک‌های روی RAB نمی‌توانند بر علیه پایگاه استفاده شوند و موشک‌های روی BAB در مقابل رادار نمی‌توانند استفاده شوند. به طور مشابه بعد از اینکه کاپیتان کیج رهگیرهای خاصی را برای حفاظت از رادار قرار داد، او نمی‌تواند آنها را برای حفاظت از پایگاه استفاده کند و رهگیرهای پایگاه نمی‌توانند رادار را حفاظت کنند.

امتیازدهی: آبی برای هر موشکی که به هدفش در پایگاه برسد یک امتیاز می‌دهد. از بین بردن رادار، به طور خاص، امتیازی برای آبی ندارد.

اطلاع قبلی: هر طرف سلاح‌های ذخیره شده دیگری را می‌داند ولی از تخصیص سلاح‌ها بین دو سایت اطلاعی ندارد. در تعمیمی از بازی سرهنگ ریچارد، آبی ممکن است چندین کشتی از هر دو نوع را داشته باشد و قرمز ممکن است چندین رادار داشته باشد. در اینجا تنها نسخه مقدماتی بازی را در نظر می‌گیریم که آبی یک RAB و یک BAB دارد و قرمز یک رادار دارد. ما روی حالتی تمرکز می‌کنیم که آبی و قرمز تعداد یکسانی سلاح دارند، برای حالتی از تعداد متفاوت سلاح‌ها به رجوع شود.

ماتریس عایدی بازی، ذخیره‌های برابر

اگر آبی و قرمز هر یک N سلاح داشته باشند، بازی مقدماتی دارای ماتریس عایدی به صورت زیر خواهد بود:

$$G(N)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \ldots & N \\ N-1 & 0 & 1 & 2 \ldots & N-1 \\ N-2 & N-2 & 0 & 1 \ldots & N-2 \\ \ldots & & & \ldots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در صورتی که آبی i موشک به رادار شلیک کند و قرمز با j رهگیر دفاع کند ($0 \le i,j \le N$) درایه در سطر iام و ستون jام ماتریس $G(N)$، g_{ij}، دستاورد آبی (مساوی با از دست دادن قرمز) است. برای راحتی، ردیف‌ها و ستون‌های یک ماتریس عایدی را با شروع از صفر شمارش می‌کنیم. سطر iام متناظر با i موشک در حمله به رادار است و ستون jام متناظر با تخصیص j رهگیر برای دفاع از حسگر است. نماد مشابهی برای بردارها به کار برده می‌شود.

الف) درایه‌های روی قطر اصلی $g_{ij}=0$ متناظر با ستونی است که i موشک در حمله به رادار در مرحله اول به طور موفقیت‌آمیزی توسط j رهگیر در دفاع از آن پاسخ داده شده‌اند، و $N-i$موشک در

حمله به پایگاه توسط $N - i$ رهگیر در دفاع از پایگاه خنثی شده‌اند (به کمک رادار). آبی صفر به دست می‌آورد زیرا هیچ موشکی به پایگاه نمی‌رسد.

ب) درایه‌های بالای قطر اصلی $g_{ij} = j - i, j > i$ متناظر با آن خروجی است که قرمز رهگیرهای بیشتری برای دفاع از رادار نسبت به موشک‌های فرستاده شده توسط آبی برای حمله، تخصیص می‌دهد. اگرچه این رادار برای هدایت رهگیرهای پایگاه باقی مانده است، رهگیرها در حمله به موشک‌ها کمتر هستند و موشک‌های اضافی امتیاز می‌گیرند. در حالت نهایی که قرمز هر رهگیر را برای دفاع از رادار استفاده می‌کند ($j = N$) هر موشکی که آبی برعلیه پایگاه شلیک می‌کند امتیاز می‌گیرد.

پ) درایه‌های زیر قطر اصلی $g_{ij} = N - i, j < i$ متناظر با آن خروجی است که در آن رادار تخریب شده است زیرا تعداد رهگیرهای بسیار کمی از آن دفاع کرده‌اند. بنابراین تمام موشک‌های پرتاب شده برعلیه پایگاه در مرحله دوم امتیاز می‌گیرند.

از شرح بازی و عناصر $G(N)$، واضح است که اگر قرمز بازی آبی را بداند (یعنی انتخابش از موشک‌های رادار-حمله، نمایش داده شده با مقدار i) او می‌تواند از امتیازدهی با انتخاب $j = i$ از او جلوگیری کند. به عبارت دیگر تعداد رهگیرهایی که قرمز برای دفاع از رادار استفاده می‌کند به اندازه تعداد موشک‌های در حال حمله است. برعکس اگر آبی بازی قرمز را بداند (یعنی انتخابش از رهگیرهای رادار-دفاع، نمایش داده شده با مقدار j) او تنها با تعداد موشک‌های لازم به رادار حمله خواهد کرد تا بیشترین امتیاز را کسب کند. بسته به مقدار j، آبی با 0 یا $j + 1$ موشک به رادار حمله خواهد کرد (توجه کنید که آبی لزوما انتخاب نخواهد کرد تا رادار را از بین ببرد). اگر چه تحت فرض‌هایمان هیچ طرفی انتخاب دیگری را نمی‌داند.

به جز حالت $N = 1$، بازی نقطه زینی ندارد و هر طرف باید راهبردهای آمیخته استفاده کند. یعنی آبی باید مقدار i را از یک توزیع احتمالی که وابسته به N است، انتخاب کند. به طور مشابه، قرمز باید مقدار j را با توجه یک قاعده تصادفی دیگر انتخاب کند. اگر هر دو بازیکن به صورت مناسب بازی کنند، ارزش حاصل از بازی، v، در مفهوم کمینه-بیشنه نظریه بازی بهینه است. یعنی v به قدری بزرگ است که آبی می‌تواند در بازی مکرر برعلیه یک بازیکن هوشمند قرمز انتظار داشته باشد، و در همان زمان، v به قدری کوچک است که قرمز می‌تواند برعلیه بازیکن هوشمند آبی انتظار داشته باشد. البته با توجه به طبیعت بازی v عددی نامنفی است ($0 \leq v \leq N$).

ناتوانی هر یک از فرماندهان برای پیش‌بینی دقیق راهبرد حریف، به دلیل روش احتمالی که در آن راهبردها انتخاب شده‌اند، مهمترین بخش انجام بازی است. جواب بازی سرهنگ ریچارد به صورت دو بردار راهبرد B و R نمایش داده می‌شود که هر یک شامل $N + 1$ عنصر هستند. عنصر iام B، b_i، احتمال این است که آبی i موشک را برای حمله به رادار تخصیص می‌دهد و عنصر jام R، r_j، احتمال این است که قرمز j رهگیر را برای دفاع تخصیص می‌دهد. در اینجا سه شرط به کار برده می‌شود: الف)

$0 \le i, j \le N$، ب) هر عنصر B و R باید در بازه 0 تا ۱ قرار گیرند و پ) مجموع عناصر هر بردار باید واحد باشد.
توجه می‌کنیم که لزومی ندارد تمام راهبردهای یک بازیکن با احتمالات غیر صفر در بردارهای راهبرد نمایش داده شود. برخی راهبردهای محض (یعنی انتخاب i یا j) آن‌قدر ناچیزند که آن‌ها نباید هرگز بازی شوند. چنین راهبردهایی معروف به راهبردهای تسلطی هستند. راهبردهایی که با احتمالات غیرصفر بازی می‌شوند راهبردهای فعال نامیده می‌شوند.

جواب بازی سرهنگ ریچارد

در این بخش جواب مسأله بازی سرهنگ ریچارد را بیان می‌کنیم. منظور از جواب بازی همان نقطه تعادل بازی است. در حقیقت می‌خواهیم راهبردهای بهینه دو بازیکن را به دست آوریم. این راهبردهای بهینه میزان تخصیص بهینه نیروها را برای هر بازیکن با توجه به تصمیم حریف به دست می‌دهد.
فرض کنید J یک بردار با $N+1$ عنصر باشد که همه برابر یک باشند. اگر ماتریس عایدی طوری باشد که همه راهبردها فعال باشند می‌توان ارزش بازی و دو راهبرد بهینه آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$v = \frac{1}{JG^{-1}J^T} \qquad (1)$$

$$B = vJG^{-1} \qquad (2)$$

$$R = vJ(G^{-1})^T \qquad (3)$$

زمانی که G منفرد باشد معادلات ۱ تا ۳ می‌توانند اصلاح شوند. اگرچه تمام ماتریس‌هایی که می‌خواهیم معکوس کنیم منظم است. (در این مقاله گاهی اوقات G به جای $G(N)$ نمایش داده می‌شود.)
همچنین می‌توان میانگین تعداد موشک‌هایی که آبی به رادار پرتاب خواهد کرد را به صورت زیر تعیین کرد:

$$\bar{b} = BK^T$$

که در آن K یک بردار با $N+1$ عنصر است که مولفه iام آن به صورت $k_i = i$ می‌باشد.
به طور مشابه میانگین تعداد رهگیرهایی که قرمز برای پوشش رادار تخصیص خواهد داد به صورت زیر است:

$$\bar{r} = RK^T$$

از آنجا که $G(N)$ ارزش بازی v است، مهم است توجه کنید که حمله کردن به پایگاه با کمتر از v موشک برای آبی یک راهبرد تسلطی است. همچنین از آنجا که رادار هرگز با بیش از $N-v$ موشک حمله نخواهد کرد، دفاع حسگر با بیش از $N-v$ رهگیر یک راهبرد تسلطی برای قرمز است. برای راحتی بهتر است تا کمیت زیر را معرفی کنیم:

$$n = [N - v]$$

که در آن $[\ldots]$ بزرگترین عدد صحیح غیرمفرط است. بنابراین آبی تا n موشک به رادار شلیک می‌کند و قرمز تا آنجا که ممکن است با n سلاح دفاع می‌کند. در نتیجه هر طرف $(n+1)$ راهبرد فعال دارند.

اکنون می‌خواهیم جواب بازی را به ازای هر N محاسبه کنیم. برای این کار ابتدا ماتریس کاهش‌یافته بازی را تعریف می‌کنیم.

ماتریس کاهش یافته بازی $G'(N)$ را ماتریسی مربعی تعریف می‌کنیم که برای هر بازیکن $n+1$ راهبرد فعال دارد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$G'(N) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ N-1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \\ N-2 & N-2 & 0 & \ldots & n-3 & n-2 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ N-n+1 & & & \ldots & 0 & 1 \\ N-n & N-n & N-n & \ldots & N-n & 0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$BG' = vJ$$

با استفاده از معادلات تفاضلی، جواب عمومی بردار راهبرد آبی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$b_i = \frac{(N-n)}{(N-i)(N-i+1)}\ , \quad i = 1,2,\ldots,n$$
$$b_0 = 1 - {}^{n}/_{N}.$$

برای بردار راهبرد قرمز معادله زیر را داریم:

$$G'R^T = vJ^T$$

لذا

$$r_i = \frac{1}{(N-i)}\ , \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$
$$r_n = 1 - \frac{v}{(N-n)}.$$

ارزش بازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v = (N-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(N-k)}$$

به راحتی می‌توان تخصیص بهینه نیروها در هر مسأله بازی سرهنگ ریچارد را بـا داشـتن اطلاعـات در مورد نیروها و تعداد جبهه‌های نبرد به کمک روابط فوق به دست آورد.

۵-نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش شد تا بازی‌های سرهنگ بلاتو و سرهنگ ریچارد به خوانندگان معرفی شود. این بازی‌ها از مشهورترین نوع بازی‌ها در نظریه بازی و مسائل نظامی است. تصمیم‌گیری عقلایی در خصوص تخصیص مناسب نیروها با هدف موفقیت در بازی و استفاده از روش‌های نظریه بازی نقش مهمی در آموزش تصمیم‌گیری فرماندهان در موقعیت‌های مشابه دارد. شبیه‌سازی این بازی‌ها و تعمیم آن‌ها با هدف آموزش نحوه تخصیص نیروها به فرماندهان یکی از اهداف مرکز بازی جنگ دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا است.

۶-مراجع

[۱] J. V. Neumann and O. Morgenstern, (1944) "Theory of Games and Economic Behavior" Wiley, New York.

[۲] O. G. Haywood, (1989) "Military Decision and Game Theory" Wiley, Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 2, No. 4, pp. 365-385.

[۳] M. Tambe, (2012) "Security and game theory, algorithms, deployed systems, lessons learned" Cambridge university press.

[۴] N. Gatti, (2008) "Game Theoretical Insights in Strategic Patrolling: Model and Algorithm in Normal-Form" in ECAI-08, pp. 403–407.

[۵] K. Lye and J. M. Wing, (2005) "Game Strategies in Network Security" International Journal of Information Security, vol. 4, no. 1–2, pp.71–86.

[۶] G. Brown, M. Carlyle, J. Kline, and K. Wood, (2005) "A Two-Sided Optimization for Theater Ballistic Missile Defense" in Operations Research, vol. 53, pp. 263–275.

[۶] T. Sandler and D. G. A. M, (2003) "Terrorism and Game Theory" Simulation and Gaming, vol. 34, no. 3, pp. 319–337.

[۷] G. Owen, (1995) "Game Theory" Academic Press, San Diego, Third Edition.

[۸] H. Bigdeli, H. hassanpour, J. Tayyebi, (2017)"The optimistic and pessimistic solutions of single and multiobjective matrix games with fuzzy payoffs and analysis of some of military problems" *Defence Sci & Tech*, (In Persian).

[۹] H. Bigdeli, H. Hassanpour, (2016) “A satisfactory strategy of multiobjective two person matrix games with fuzzy payoffs” Iranian Journal of Fuzzy Systems, 13, 17-33.

[۱۰] H. Bigdeli, H. Hassanpour, J. Tayyebi, (2018) “Constrained Bimatrix Games with Fuzzy Goals and its Application in Nuclear Negotiations”.

[۱۱] H. Bigdeli, H. Hassanpour, **(2017)** “Modeling and solving multiobjective security game problem using multiobjective bilevel problem and its application in metro security system”, **Journal of Electronical & Cyber Defence, (In Persian) 31-38.**

[۱۲] Bigdeli H., Hassanpour H., Tayyebi J. (2018) “Multiobjective security game with fuzzy payoffs” IJFS.

[۱۳] **M. D. Wittman**. (2011) “Solving the blotto game: A computational approach”, MIT University.

[۱۴] A. A.Grometstein and D. Shoham. (1989) “Colonel Richard's Game” The Lincoln uworatory Journal, Volume 2, Number 2.