Iranian Journal of Wargaming

AJA Command and Staff University http://www.ijwg.ir/ Online ISSN: 2676-7708 Print ISSN: 2676-5284

Choosing the best counter-strategy for Hamas against the Zionist regime and simulating this strategy using Lanchester fractional differential equations

Ehsan Lotfali Ghasab [1]✉ | Hajjat Allah Ebadi Zadeh [2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran. **E-mail:** e.l.ghasab@jsu.ac.ir
2. Mathematics Department, Faculty of Basic Sciences, Imam Ali Afsari University, Tehran, Iran. **E-mail:** ebadizadeh.h@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received 26 November 2024

Received in revised form

1 March 2025

Accepted

8 March 2025

Keywords:

CounterStrategy,

Deterrence,MatrixGames,Hamas,

Lanchester Equations,

ABSTRACT

In this article, we intend to use two-player zero-sum games to obtain the appropriate Counter-Strategy for Hamas forces against the Zionist regime. In fact, we correspond the Counter-Strategy conditions of Hamas as the injured player to the game model *(H,I,G)*, where *H* is the set of possible Counter-Strategy of Hamas (the friendly player) against the Zionist regime and *I* is the set of possible reactions of the Zionist regime after Hamas' Counter-Strategy. Also, *G* is the Hamas utility matrix. We solve the model using the Maximin method. Then, using Lanchester fractional differential equations, we obtain an estimated fraction of the casualty rates of Hamas forces and Zionist forces and the populations of the two groups in the future of the war and determine the winning force of the war.

Cite this article: lotfalighasab,E. and Ebadi Zadeh,H. A. (2025). Choosing the best Counter-Strategy for Hamas against the Zionist regime and simulating this Strategy using Lanchester fractional differential equations. Iranian Journal of Wargaming, 7(15), 95- 116

DOI: 10.22034/ijwg.2025.490499.1103

Publisher: Command and Staff University

فصلنامه علمی مطالعات جنگ

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۱۷۶۰ شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۱۷۶۰ https://www.qjws.ir/ دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا

انتخاب بهترین اقدام متقابل حماس در مقابل رژیم صهیونیستی و شبیه‌سازی این اقدام با استفاده از معادلات دیفرانسیل لانچستر کسری

احسان لطفعلی قصاب [1] ✉ | حجت الله عبادی‌زاده [2]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، دزفول، ایران. **رایانامه:** e.l.ghasab@jsu.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران.
رایانامه: Ebadizadeh.h@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت:
۱۴۰۳/۰۹/۰۶

تاریخ بازنگری:
۱۴۰۳/۱۲/۱۱

تاریخ پذیرش:
۱۴۰۳/۱۲/۱۸

کلیدواژه‌ها:
اقدام متقابل، بازدارندگی، بازی‌های ماتریسی، حماس، معادلات لانچستر

چکیده

در این مقاله قصد داریم با استفاده از بازی‌های مجموع صفر دو نفره اقدام متقابل مناسب برای نیروهای حماس در مقابل رژیم صهیونیستی را به دست آوریم. در واقع شرایط اقدام متقابل حماس به‌عنوان بازیکن صدمه‌دیده را با مدل بازی(H, I, G) متناظر می‌کنیم که در آن H مجموعه اقدامات متقابل احتمالی حماس (بازیکن دوست) بر علیه رژیم صهیونیستی و I مجموعه واکنش‌های احتمالی رژیم صهیونیستی پس از اقدام متقابل حماس است. همچنین G ماتریس سودمندی حماس است. مدل را به روش ماکسی مین حل می‌کنیم. سپس با استفاده از معادلات دیفرانسیل لانچستر کسری تخمینی از نرخ تلفات نیروهای حماس و نیروهای رژیم صهیونیستی و جمعیت دو گروه در آینده جنگ به دست می‌آوریم و نیروی پیروز جنگ را مشخص می‌کنیم.

استناد: لطفعلی قصاب، احسان و عبادی‌زاده، حجت الله (۱۴۰۴). انتخاب بهترین اقدام متقابل حماس در مقابل رژیم صهیونیستی و شبیه سازی این اقدام با استفاده از معادلات دیفرانسیل لانچستر کسری. دو فصلنامه بازی جنگ. ۷(۱۵)، ۹۵- ۱۱۶.

DOI: 10.22034/ijwg.2025.490499.1103

ناشر: دانشگاه فرماندهی و ستاد ارتش جمهوری اسلامی ایران

مقدمه

مطالب این بخش از منابع (شریفی،۱۳۹۶)، (Abbasi,2015)، (Abu amr,1993)، (Afshon,2018)، (Ahmadian,2013)، (Azad,2016) استخراج شده‌اند.

استعداد نظامی حماس و گروه‌های مسلح

گروه‌های مقاومت از لحاظ امکانات و توان نظامی به دو دسته تقسیم می‌شوند. گردان‌های قسام و گروهان‌های قدس که دارای امکانات نظامی بیشتری هستند، در گروه نخست قرار می‌گیرند. گروه دوم نیز شامل گروه‌هایی مانند تیپ‌های ناصر صلاح‌الدین، گردان‌های جهاد جبریل، گردان‌های مقاومت ملی و جیش الاسلام است که از امکانات نظامی کمتری برخوردارند. در میان این گروه‌ها، گردان‌های شهید عزالدین قسام نسبت به سایر گروه‌ها از امکانات و قدرت نظامی بیشتری برخوردارند. در واقع با نگاهی گذرا به تاریخ جنبش حماس و گردان شهید قسام، متوجه می‌شویم توان نظامی این گردان سیری صعودی داشته است. آغاز مبارزه این گردان در جریان انتفاضۀ اول در سال ۱۹۸۷ بود که در مقابل ارتش رژیم صهیونیستی از سنگ استفاده می‌کرد. این سنگ‌ها به‌تدریج جای خود را به کوکتل‌مولوتف داد.

سلاح‌های سرد همچون چاقو، سلاح بعدی بود که در دست مبارزان گردان شهید قسام آمد و آن‌ها توانستند از همین طریق، تعدادی از سربازان رژیم صهیونیستی را به هلاکت برسانند. با ادامه جنایت‌های دشمن صهیونیستی و به شهادت رسیدن رهبران و اعضای این جنبش اسلامی، مقاومت نیازمند استفاده از سلاح‌هایی جدید با روش‌هایی نوین بود؛ لذا گردان‌های قسام وارد دورۀ استفاده از سلاح گرم شد و بعد از آن نیز به ساخت سلاح در داخل اراضی فلسطینی روی آورد. در واقع عواملی در این میان وجود داشته که باعث برتری نظامی گردان قسام بر دیگر گروه‌های مقاومت فلسطینی شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود:

الف ـ سلاح‌های ساخت داخل:

گردان‌های قسام، یگانی برای ساخت سلاح دارد و مسئولیت ساخت انواع سلاح‌های مورد نظر را با توجه به امکانات موجود در نوار غزه بر عهده دارد. این یگان دارای پنج بخش

است که عبارت‌اند از: بخش موشکی، بخش بمب‌ها (ضدتانک) و نارنجک، بخش استحکامات و موانع، بخش مواد منفجره و بخش توسعه و آزمایش سلاح‌ها.
گوشه‌ای از سلاح‌های تولیدشده به دست این نیروها به این شرح است:
نارنجک دستی، خمپاره، بمب‌های ضدتانک، مسلسل یوزی، آرپی‌جی ۲۹.

ب ـ سلاح‌های وارداتی

مبارزان با حفر تونل‌های متعددی در بسیاری از مناطق نوار غزه سعی کرده‌اند ضمن کاهش محاصره اقتصادی، در هنگام هجوم شدید رژیم صهیونیستی به این منطقه از خود دفاع کرده و به مواضع دشمن حمله کنند. این تونل‌ها که به‌عنوان یک مجموعه در زیر زمین است، عاملی اصلی در ساختار قدرت نظامی حماس و ورود سلاح به نوار غزه است. سلاح‌های وارداتی که گردان‌های قسام در سال‌های اخیر برخی از آن‌ها را نیز به کار گرفته‌اند، عبارت‌اند از: موشک گراد، موشک فجر-۳، موشک تاندوم، موشک ۱۰۷، موشک کورنت.

استعداد نظامی رژیم صهیونیستی

رژیم صهیونیستی هم‌مرز ایران نیست؛ اما ثابت کرده که به هنگام تصمیم، به‌راحتی به اقدام در ماورای مرزهای خود دست می‌زند. رژیم صهیونیستی اکنون سال‌ها است که از نظر اطلاعاتی اقدامات متعددی را علیه دشمنان سنتی منطقه‌ای خود از جمله ایران آغاز کرده است.
رژیم صهیونیستی نیز مانند هر پدیده دیگری در روی زمین، دارای نقطه ضعف است. خاک رژیم صهیونیستی بسیار کوچک و جمعیت آن بسیار کم است. خاک اندک باعث می‌شود که این کشور دارای عمق استراتژیک نباشد و هرگونه حمله غافلگیرانه مانند سال ۱۹۷۳ آن کشور را آسیب‌پذیر کند. رژیم صهیونیستی دارای ۲۰ هزار کیلومترمربع وسعت است که این میزان حتی کمتر از وسعت استان‌های کوچک ایران است. از سوی دیگر جمعیت رژیم صهیونیستی هرگز برای نبردهای طولانی و جنگ‌های فرسایشی مناسب نیست؛ چراکه جنگی بزرگ برای مدت مثلاً چند ماه می‌تواند ۳۰ تا ۵۰ درصد جمعیت فعال رژیم صهیونیستی را در مناطق جنگی معطل کند و طبیعتاً تولید ناخالص ملی این کشور به‌شدت کاهش دهد. رژیم صهیونیستی در نبردهای خود معمولاً بین یک روز تا

یک ماه بیشتر وقت صرف نکرده است. اگر به هر دلیلی رژیم صهیونیستی نتواند جنگ را به شیوه مناسب خود به‌سرعت به پایان ببرد، آنگاه این عنصر جمعیت و عمق خاک است که تعیین‌کننده نبرد می‌شود.

سیاست رژیم صهیونیستی از ابتدای روی کار آمدن دولت بن گوریون تاکنون بر اساس پیشگیری و پیش‌دستی بوده است. رژیم صهیونیستی ۵ سال قبل از آنکه نیروگاه تموز عراق به بهره‌برداری برسد آن را مورد هدف قرار داد. ارتش‌های عرب را در ژوئن ۱۹۶۷ قبل از آنکه هیچ فعالیتی از خود نشان دهند، زمین‌گیر کرد. در ۱۹۸۲ قبل از آنکه سوریه تصمیم به پشتیبانی از لبنان بگیرد، با پایگاه‌های منهدم شده خود روبرو شد.

ارتش رژیم صهیونیستی از ۱۶۱ هزار نیروی کادر دائم و ۴۲۵ هزار نیروی ذخیره برخوردار است همان‌گونه که قبلاً گفته شد به دلیل کمی جمعیت رژیم صهیونیستی برای این کشور امکان ندارد که ۳۰ درصد جمعیت فعال خود را به‌عنوان نیروی نظامی فعال نگه دارد بنابراین، این کشور ۶ میلیون نفری تنها از ۱۶۱ هزار نیرو بهره می‌برد و باقی ارتش این کشور در حال آماده‌باش مشغول به فعالیت‌های روزمره هستند. جدول زیر به‌طور خلاصه نیروی تهاجمی رژیم صهیونیستی را نشان می‌دهد.

جدول (۱)

عنوان	تعداد	واحد
سرباز	۱۶۱۰۰۰	نفر
هواپیما	۴۵۶	فروند
تانک	۴۱۵۰	دستگاه
نفربر	۶۱۰۰	دستگاه
توپ	۲۰۰۰	عراده
خمپاره	۵۰۰۰	دستگاه
هلیکوپتر	۱۳۵	فروند
بودجه نظامی	۱۱/۲	میلیارد دلار

با توجه به کلیت مطالب بیان شده، می‌توان راهبردهای مؤثری برای حماس و مقاومت فلسطین مطرح کرد:

۱- برتری نسبی رژیم صهیونیستی در نیروی هوایی آن است پس حتی‌المقدور باید با حملات موشکی، پهپادی و راکتی فرودگاه‌های نظامی به همراه جنگنده‌های

آن نابود شوند این اقدام باید یا با استعداد نظامی حماس و یا با کمک جبهه مقاومت انجام شود.

۲- جنگ باید به درازا کشیده شود چون ارتش رژیم صهیونیستی طبق سابقه خود به‌هیچ‌وجه توانایی جنگ طولانی‌مدت و فرسایشی را ندارد.

۳- با اجرای عملیات پارتیزانی در ابعاد کوچک مانند طوفان الاقصی باید تأسیسات رژیم در سرزمین‌های اشغالی مورد هدف قرار گیرد.

٤- به‌هیچ‌وجه نباید به رژیم صهیونیستی اجازه پیش‌دستی در اجرای عملیات را داد؛ چراکه این یکی از راهبردهایی است که با استفاده از آن ارتش رژیم صهیونیستی در اکثر عملیات‌ها پیروز بوده است.

۵- کمک گرفتن از دیگر گروه‌های مقاومت منطقه برای اینکه تمرکز ارتش رژیم صهیونیستی در یک جبهه نباشد؛ چراکه ارتش رژیم صهیونیستی توانایی جنگ در چند جبهه به‌طور هم‌زمان را ندارد.

مبانی نظری و پیشینه‌های پژوهش

مبانی نظری

بازی‌های مجموع صفر دونفره (ماتریسی)

بازی‌های مجموع صفر دو نفره یا بازی‌های ماتریسی از اولین نوع بازی‌های معرفی‌شده در نظریه بازی‌ها هستند. این نوع بازی‌ها کاملاً رقابتی هستند. به این معنی که از انجام این بازی میزان دریافتی یک بازیکن برابر مقدار از دست‌دادن بازیکن دیگر است. در حقیقت عایدی دو بازیکن قرینه یکدیگر هستند. نمایش این بازی‌ها در شکل نرمال به این صورت است که راهبردهای بازیکنان در سطرها و ستون‌های ماتریس نمایش داده‌شده و با در نظر گرفتن هر خروجی ممکن از بازی، عایدی یا درایه متناظر آن در ماتریس نمایش داده می‌شود. با حل این بازی به دنبال جوابی هستیم که نقطه تعادل بازی نام دارد. این جواب برای یک بازیکن به این صورت تعبیر می‌شود که با ثابت در نظر گرفتن بهترین جواب برای بازیکن دیگر، این بازیکن انگیزه‌ای برای تغییر بازی از این راهبرد نداشته باشد (بیگدلی،۱۳۹۰).

در ادامه این بخش به بیان ریاضی مدل و جواب بازی‌های مجموع صفر دو نفره می‌پردازیم.

تعریف (اسحاقی،۱۳۹۶). فرض کنید $I=\{1,\dots,m\}$ و $J=\{1,\dots,n\}$ به ترتیب مجموعهٔ راهبردهای محض بازیکنان ۱ و ۲ و f_1 و f_2 توابع عایدی بازیکنان ۱ و ۲ باشند. وقتی بازیکن ۱ راهبرد محض $i\in I$ و بازیکن ۲ راهبرد محض $j\in J$ را انتخاب می‌کند، $\mathrm{f}_1(i,j)$ و $\mathrm{f}_2(i,j)$ به ترتیب عایدی‌های بازیکنان ۱ و ۲ هستند. اگر

$$\forall i\in I,\forall j\in J \quad f_1(i,j)+f_2(i,j)=0 \qquad (1)$$

بازی را مجموع صفر می‌نامند. با تعریف $\mathrm{a_{ij}}=\mathrm{f}_1(i,j)=-f_2(i,j)$، بازی مجموع صفر در فرم نرمال را می‌توان توسط یک ماتریس به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

که راهبردهای بازیکن ۱ در سطرها و راهبردهای بازیکن ۲ در ستون‌ها نمایش داده می‌شود و این ماتریس، ماتریس عایدی بازی نام دارد؛ لذا بازی مجموع صفر دو نفره را بازی ماتریسی نیز می‌نامند.

با توجه به اینکه هر دو بازیکن راهبردهای خود را به‌صورت منطقی انتخاب می‌کنند، لذا بازیکن ۱ می‌داند که با انتخاب هر راهبرد (سطر ماتریس) بازیکن ۲ راهبردی (ستونی از ماتریس) را انتخاب خواهد کرد که کمترین عایدی برای بازیکن ۱ به دست آید؛ لذا بازیکن ۱ تصمیم می‌گیرد راهبردی را انتخاب کند که این مقدار را بیشینه کند؛ بنابراین به دنبال یافتن مقدار

$$\underline{v} = \max_{i=1,\dots,m}\min_{j=1,\dots,n} a_{ij} \qquad (3)$$

است که نشان‌دهنده کمترین مقداری است که بازیکن ۱ تضمین می‌کند که به دست آورد (کمینه دستیابی بازیکن ۱ است). بازیکن ۲ نیز در انتخاب راهبرد خود فرض می‌کند که بازیکن ۱ راهبرد خود را طوری انتخاب خواهد کرد که بیشترین ضرر را به وی وارد کند؛ لذا بازیکن ۲ به دنبال راهبردی خواهد بود که کمترین ضرر را از این انتخاب داشته باشد؛ بنابراین به دنبال به دست آوردن

$$\overline{v} = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} \qquad (4)$$

است که نشان‌دهنده بیشترین مقداری است که بازیکن ۲ ممکن است از دست بدهد (حداکثر میزان باخت بازیکن ۲ است). اگر $\overline{v} = \underline{v}$ گوییم بازی ماتریسی دارای ارزش $\overline{v} = \underline{v} = v$ است و سطر و ستون i^* و j^* با عایدی $a_{i^*j^*}$ جواب بهینه مسئله خواهد بود که آن را نقطهٔ زینی بازی گویند.

لم (بیگدلی،۱۳۹۰). بازی ماتریسی $A = [a_{ij}]$ دارای نقطه زینی است اگر و تنها اگر

$$\overline{v} = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \underline{v} \qquad (5)$$

برهان. برای دیدن برهان به (بیگدلی، ۱۳۹۰) مراجعه شود.

تعریف (بیگدلی،۱۳۹۰). یک راهبرد آمیخته مانند $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ برای بازیکن ۱ یک توزیع احتمال روی مجموعه راهبردهای محض I است. مجموعهٔ راهبردهای آمیخته بازیکن ۱ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m \right\}, \qquad (6)$$

به‌طور مشابه، مجموعه راهبردهای آمیخته بازیکن ۲ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, y_i \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}, \qquad (7)$$

در واقع می‌توان گفت x_i احتمال انتخاب راهبرد iام توسط بازیکن ۱ و y_i احتمال انتخاب راهبرد jام توسط بازیکن ۲ است. راهبردهای محض حالت خاصی از راهبردهای آمیخته هستند. درصورتی‌که به یکی از راهبردهای بازیکن مقدار احتمال ۱ و به بقیه راهبردهای او مقدار صفر تخصیص داده شود، یک راهبرد محض خواهیم داشت.

بازی ماتریسی در شکل نرمال به‌اختصار به‌صورت (X, Y, A) نیز نمایش داده می‌شود.

وقتی بازیکن ۱ و ۲ به ترتیب راهبردهای $x \in X$ و $y \in Y$ را انتخاب می‌کنند، امید ریاضی برای بازیکن ۱ که عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ نامیده می‌شود به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

هنگامی‌که در بازی ماتریسی، بازیکن ۱ راهبرد آمیخته $x \in X$ را انتخاب می‌کند، بدترین عایدی مورد انتظارش به‌صورت زیر است:

$$v(x) = \min_{y \in Y} x^T A y$$

بنابراین، بازیکن ۱ باید x را طوری انتخاب کند که این مقدار را بیشینه کند و عایدی زیر را به دست آورد:

$$v_{\mathrm{I}} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y \qquad (8)$$

راهبرد x که با بیشینه‌سازی $v(x)$ به دست می‌آید، راهبرد بیشینه - کمینه بازیکن ۱ نامیده می‌شود و جفت راهبرد (x,y) که در شرایط (8) صدق کند جواب بیشینه - کمینه نام دارد. به‌علاوه v_{I} ارزش بازی A برای بازیکن ۱ نامیده می‌شود.
به‌طور مشابه، هنگامی‌که در یک بازی ماتریسی، بازیکن ۲ راهبرد آمیخته $y \in Y$ را انتخاب می‌کند، بدترین پرداختی مورد انتظارش به‌صورت زیر است:

$$v\,(y) = \max_{x \in X} x^T A y$$

بنابراین، بازیکن ۲ باید y را طوری انتخاب کند که این مقدار را کمینه کند و عایدی زیر را به دست آورد:

$$v_{\mathrm{II}} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y \qquad (9)$$

راهبرد y که با بیشینه‌سازی $v(y)$ به دست می‌آید، راهبرد کمینه - بیشینه بازیکن ۲ نامیده می‌شود و جفت راهبرد (x, y) که در شرایط (9) صدق کند جواب کمینه - بیشینه نام دارد. به‌علاوه v_{II} ارزش بازی A برای بازیکن ۲ نامیده می‌شود.

قضیه (ماکسی مین) (بیگدلی،۱۳۹۰). برای هر بازی مجموع صفر دو نفره A داریم

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T Ay \;=\; \min_{y\in Y}\max_{x\in X} x^T Ay \qquad (10)$$

برهان. برای مشاهده برهان به (بیگدلی،۱۳۹۰) مراجعه کنید.
جفت راهبردهای (x^*, y^*) که در معادله (10) صدق کنند جواب تعادل نامیده می‌شود.

تبدیل بازی جمع صفر به مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی

فرض کنید $A = a_{ij}$ ماتریس سودمندی یک بازی با جمع صفر با بعد $n \times m$ باشد اگر بازیکن ۱ از راهبرد آمیخته (مخلوط)$(p_1, \dots, p_m)$ و بازیکن ۲ راهبرد ستون jام را انتخاب کند، در این حالت سودمندی بازیکن ۱ برابر $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ است. حال اگر ارزش بازی برابر Vباشد آنگاه طبق قضیه ماکسی مین که در ابتدای بخش گفته شد داریم:

$$\mathrm{V} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T Ay$$

اگر $(p_1, \dots, p_m)$ راهبرد بهینه بازیکن ۱، $y' = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)^T$ و A_j ستون jام ماتریس A باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} &= pA_j \\ &= pAy' \\ &\geq \min_{y\in Y} pAY \\ &= \max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T Ay = V\end{aligned}$$

لذا تابه‌حال توانسته‌ایم قیود زیر را برای یک راهبرد بهینه $p = (p_1, \dots, p_m)$ به دست آوریم:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq V, \quad j = 1, \dots, n$$

حال اگر a یک عدد صحیح مثبت باشد با جمع طرفین رابطه بالا با a قیود زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i (a + a_{ij}) \geq a + V, \quad j = 1, \dots, n$$

در نتیجه می‌توان درایه‌های ماتریس A را به یک ماتریس با درایه‌های مثبت تغییر داد. حال اگر طرفین رابطه را بر $a + V$ تقسیم کنیم آنگاه قیود زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{V + a} (a + a_{ij}) \geq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

حال با قرار دادن $x_i = \frac{p_i}{V+a}$ ، جواب بهینه بازی برابر با $p = (p_1, \dots, p_m)$ است که در آن $p_i = x_i (V + a)$ از طرفی

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{V + a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{V + a} = \frac{1}{V + a}, \quad j = 1, \dots, n$$

اما بازیکن ۱ می‌خواهد تا جایی که امکان دارد ارزش بازی یعنی Vرا افزایش دهد که این با کمینه کردن $\frac{1}{V+a}$ یعنی $\sum_{i=1}^{m} x_i$ معادل است. درنتیجه جواب بهینه یک بازی با جمع صفر به‌وسیله برنامه‌ریزی خطی زیر کاهش می‌یابد:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i \left(a + a_{ij}\right) \geq 1, & j = 1, \dots, n \\ x_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

حال اگر $z=(z_1,\dots,z_m)$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی بالا باشد آنگاه $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i}z$ بازیکن بهینه راهبرد ۱ و $V=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i}-a$.است بازی ارزش

حال با ضرب محدودیت‌های $\sum_{i=1}^{m} x_i\left(a+a_{ij}\right)\geq 1,$ در ۱- به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌رسیم:

$$\min z=\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_i\left(-a-a_{ij}\right)\leq -1, & j=1,\dots,n\\ x_i\geq 0, & i=1,\dots,m\end{cases}$$

با روشی مشابه راهبرد بهینه بازیکن ۲ از مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$max\, w=\sum_{i=1}^{n} y_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} y_j\left(a+a_{ij}\right)\geq 1, & i=1,\dots,m\\ y_i\geq 0, & j=1,\dots,n\end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل لانچستر

لانچستر دانشمند معروف انگلیسی بود که اولین بار توانست مدلی دینامیکی را برای اندازه جمعیت نیروهای درگیر در جنگ ارائه دهد (Kress,2018). با استفاده از این مدل می‌توان نرم‌افزارهای مختلفی به‌منظور شبیه‌سازی بازهای جنگ ارائه داد که یکی از حوزه‌های کاربردهای صنعتی و تجاری این مدل است. این مدل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}H(t)=-R_I I(t) & R_I>0\\ \frac{d}{dt}I(t)=-R_H H(t) & R_H>0\\ H(0)=H_0 \quad I(0)=I_0\end{cases}$$

که در آن R_I و R_H به ترتیب نرخ تلفات نیروهای I و H هستند و H_0 و I_0 به ترتیب بیانگر جمعیت اولیه نیروهای H و I هستند و همچنین $H(t)$ و $I(t)$ اندازه جمعیت نیروهای H و I را در لحظه t نمایش می‌دهند. این معادله دیفرانسیل در حوزه‌های مختلفی نظیر نظامی، اقتصادی، زیست‌شناسی، و اپیدمی شناسی کاربرد دارد.
در برخی مواد دشمن از آتش غیرمستقیم مثل آتش (توپخانه و خمپاره) استفاده می‌کند.
در این حالت معادله لانچستر را می‌توان با استفاده از فرم غیرخطی زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H(t) = -R_I H(t)I(t) & R_I > 0 \\ \frac{d}{dt}I(t) = -R_H H(t)I(t) & R_H > 0 \\ H(0) = H_0 \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

در هر دو معادله لانچستری که مطرح کردیم، ایرادی وجود داشت و آن هم این‌که در هر دو معادله نرخ تلفات را در همه زمان‌ها یکسان در نظر گرفتیم که در عمل دور از واقعیت است؛ پس اکنون معادلات فوق را با ضرایب وابسته به زمان به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.
برای نبردهای آتش مستقیم داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H(t) = -R_I(t)I(t) & R_I > 0 \\ \frac{d}{dt}I(t) = -R_H(t)H(t) & R_H > 0 \\ H(0) = H_0 \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

و برای نبردهای با آتش غیرمستقیم داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H(t) = -R_I(t)H(t)I(t) & R_I > 0 \\ \frac{d}{dt}I(t) = -R_H(t)H(t)I(t) & R_H > 0 \\ H(0) = H_0 \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

ایراد دیگری که در مدل‌های فوق وجود دارد استفاده هم‌زمان هر دو طرف از یک نوع آتش است. حال مدل را برای حالت ناهمتراز بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H(t) = -R_I(t)I(t) \qquad R_I > 0 \\ \dfrac{d}{dt}I(t) = -R_H(t)H(t)\dfrac{I(t)}{I(0)} \qquad R_H > 0 \\ H(0) = H_0 \qquad I(0) = I_0 \end{cases} \qquad (*)$$

که در آن نیروهای I از آتش مستقیم و نیروهای H از آتش غیر مستقیم استفاده می‌کنند.

مدل کسری لانچستر

مدل کسری لانچستر مکانیزم حافظه را در مدل خود مورد مطالعه قرار می‌دهد که در آن جنگ‌های ناهمتراز و مکانیزم‌های آتش مستقیم و غیرمستقیم قابل پیاده‌سازی است:

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha H(t) = -R_I(t)F_1(H(t),I(t)) \qquad R_I > 0 \\ {}_0^cD_t^\alpha I(t) = -R_H(t)F_2(H(t),I(t)) \qquad R_H > 0 \\ H(0) = H_0 \qquad I(0) = I_0 \end{cases} \qquad (**)$$

که در آن $H(t)$ و $I(t)$ به ترتیب نشان‌دهنده جمعیت دو یگان درگیر هستند. اگر $F_1\big(H(t),I(t)\big) = I\,(t)$، $F_2\big(H(t),I(t)\big) = H(t)$ معادله (**) نشان‌دهنده نبرد متقارن با آتش مستقیم است، اگر

$$F_2\big(H(t),I(t)\big) = F_1\big(H(t),I(t)\big) = I(t)H(t)$$

باشد، نشان‌دهنده نبرد متقارن با آتش غیر مستقیم است و اگر

$$F_2\big(H(t),I(t)\big) \neq F_1\big(H(t),I(t)\big)$$

نشان‌دهنده یک نبرد نامتقارن است.

روش آدامز – بشفور – مولتن

به‌منظور ارائه روش مورد نظر، می‌توان فرم کلی معادلات دیفرانسیل کسری را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \qquad k = 1,2,\dots,\lceil\alpha\rceil \end{cases}$$

که در آن $\lceil . \rceil$ نشان‌دهنده تابع سقف است. می‌توان این معادله دیفرانسیل مقدار اولیه را به‌صورت یک معادله انتگرال ولترا به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau, y(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

حال با استفاده از تقریب‌های متفاوت برای انتگرال ظاهر شده در فرمول بالا می‌توان مدل‌های متفاوتی را به دست آورد. برای به دست آوردن شمای پیش‌بینی‌کننده، جمله انتگرالی را با استفاده از قاعده ضربی مستطیلی تقریب خواهیم زد که نتیجه می‌دهد:

$$y^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{{t_{n+1}}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n} \beta_{j,n+1} f(t_j, y(t_j))$$

که در آن

$$\beta_{j,n+1} = \frac{\delta t^\alpha}{\alpha}((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha)$$

بنابراین، می‌توانیم مقدار پیش‌بینی‌کننده تابع مجهول $y\ (t)$ را در زمان tn+1 با استفاده از این فرمول به دست آوریم. سپس با استفاده از قاعده ضربی ذوزنقه‌ای به شمای تصحیح کننده دست خواهیم یافت که به‌صورت زیر است:

$$y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{{t_{n+1}}^k}{k!} y_0^{(k)}$$

$$+\frac{\delta t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\left[f(t_{n+1},y^{p}(t_{n+1})+\sum_{j=0}^{n}\vartheta_{j,n+1}f(t_j,y(t_j))\right]$$

که در آن:

$$\vartheta_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1}-(n-\alpha)(n+1)^{\alpha} & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1}+(n-j)^{\alpha+1}-2(n-j+1)^{\alpha+1} & 1\le j\le n \\ 1, & j=n+1 \end{cases}$$

مدل‌سازی اقدام متقابل حماس در مقابل رژیم صهیونیستی

ازآنجاکه هدف حل موضوع تصمیم‌گیری حماس است؛ لذا پس از دستیابی به مدل بازی (H,I,A) که در آن H مجموع اقدامات احتمالی حماس و I مجموع اقدامات احتمالی رژیم صهیونیستی و A تابع سود بازی است، کافی است مدل برنامه‌ریزی خطی حماس را به دست آوریم که به شکل زیر است:

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_i(-a_{ij})\le -1, & j=1,\dots,n \\ x_i\ge 0, & i=1,\dots,m\end{cases}$$

حال با توجه به توضیحات بخش قبل می‌توان راهبرد بهینه را به دست آورد.

پیش از حل مدل فوق باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱- اقدامات احتمالی حماس و رژیم صهیونیستی را در نظر می‌گیریم.

۲- ماتریس بازی را به دست می‌آوریم.

۳- به روش ساده‌سازی تسلط ماتریس بازی را ساده می‌کنیم.

۴-در پایان با استفاده از متلب مدل را حل کرده و راهبرد بهینه را به دست می‌آوریم.

اقدامات احتمالی حماس را به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

H1) اجرای عملیات چریکی و پارتیزانی برای نابودی تأسیسات رژیم صهیونیستی،
H2) به درازا کشیدن جنگ و ایجاد جنگ فرسایشی و گرفتن قدرت عمل و جلوگیری از هرگونه پیش‌دستی رژیم صهیونیستی،
H3) تلاش برای نابودی جنگنده‌ها و فرودگاه‌های رژیم صهیونیستی در صورت نیاز با کمک دیگر گروه‌های مقاومت،
H4) کمک گرفتن از گروه‌های مقاومت منطقه جهت مشغول کردن رژیم صهیونیستی در چند جبهه مختلف.

اقدامات احتمالی رژیم صهیونیستی:
I1) حمله هوایی به مردم و شهرها و بیمارستان‌ها و...
I2) حمله زمینی با استعداد کامل برای جنگی تمام‌عیار
I3) ترور سران مقاومت
I4) حمله به گروه‌های مقاومت دیگر
I5) تلاش برای نابودی تونل‌های زیرزمینی در غزه
فرض کنید اولویت‌بندی عملکردهای رژیم صهیونیستی در مقابل هر عملکرد حماس به شکل زیر باشد:

H2	I3	I1	I5	I2	I4
H4	I4	I3	I5	I2	I1
H3	I5	I2	I3	I1	I4
H1	I1	I5	I3	I2	I4

حال حالت‌های برد و باخت را به شکل زیر تعیین می‌کنیم:

H2	I3 **باخت**	I1 **برد**	I5 **باخت**	I2 **برد**	I4 **برد**
H4	I4 **برد**	I3 **برد**	I5 **برد**	I2 **باخت**	I1 **برد**
H3	I5 **باخت**	I2 **برد**	I3 **باخت**	I1 **برد**	I4 **برد**
H1	I1 **برد**	I5 **باخت**	I3 **باخت**	I2 **برد**	I4 **برد**

از عدد 12 شروع کرده و درایه‌های برد و باخت را ارزش‌گذاری می‌کنیم. این ارزش‌گذاری باید توسط دکترین نظامی انجام شود. برای مثال فرض کنید ارزش‌گذاری به شکل زیر باشد:

I4 **برد** **۱۰**	I2 **برد** **۱۲**	I5 **باخت** **۲**	I1 **برد** **۹**	I3 **باخت** **۳**	**H2**
I1 **برد** 11	I2 **باخت** 10	I5 **برد** 6	I3 **برد** 7	I4 **برد** 10	**H4**
I4 **برد** **۹**	I1 **برد** **۸**	I3 **باخت** **۱**	I2 **برد** **۵**	I5 **باخت** **۱**	**H3**
I4 **برد** 7	I2 **برد** 9	I3 **باخت** 1	I5 **باخت** 3	I1 **برد** 2	**H1**

اگر درایه‌های متناظر با عملکرد *H3* و *H1* را در نظر بگیریم، می‌بینیم که از مقادیر متناظر با عملکرد *H4* کمترند؛ لذا ماتریس با روش تسلط از دیدگاه ما برای حماس به شکل زیر ساده می‌شود:

I4 **برد** **۱۰**	I2 **برد** **۱۲**	I5 **باخت** **۲**	I1 **برد** **۹**	I3 **باخت** **۳**	**H2**
I1 **برد** 11	I2 **باخت** 10	I5 **برد** 6	I3 **برد** 7	I4 **برد** 10	**H4**

حال اگر با دیدگاه رژیم صهیونیستی به مسئله نگاه کنیم، می‌دانیم که رژیم صهیونیستی خواهان کاهش دستاوردهای حماس است؛ لذا از دید رژیم صهیونیستی عملکردهای I2 و I4 بهینه نیستند؛ لذا با حذف ستون‌های *I2* و *I4* به ماتریس ساده زیر می‌رسیم:

H2	I3 باخت ۳	I1 برد ۹	I5 باخت ۲
H4	I4 برد 10	I3 برد 7	I5 برد 6

حال با حل برنامه این بازی در متلب به جواب (0.0222,0.1333) می‌رسیم؛ بنابراین راهبرد بهینه ما برابر است با

$$\frac{1}{0.0222+0.1333}(0.0222,0.1333)=(0.1427527,0.85723473)$$

یعنی در ۱۴ درصد مواقع باید از راهبرد H2 و در ۸۶ درصد مواقع از راهبرد H4 استفاده کرد. پس می‌توان اقدام H4 را به‌عنوان اقدام متقابل در نظر گرفت.

شبیه‌سازی بازی جنگ زمینی حماس و رژیم صهیونیستی

در این بخش با استفاده از نتایج بخش قبل به شبیه‌سازی عددی مدل با استفاده از معادلات لانچستر می‌پردازیم. همان‌طور که در بخش قبل مطرح شد، بهترین استراتژی حماس استفاده از کمک گروه‌های مقاومت دیگر در منطقه است که این کمک می‌تواند شامل دریافت ادوات نظامی و حملات موشکی و پهپادی گروه‌های مقاومت به رژیم صهیونیستی باشد.

از طرفی رژیم صهیونیستی نیز بهترین استراتژی او در مقابل حماس از بین بردن تونل‌های زیر زمینی برای جلوگیری از دریافت کمک‌های گروه‌های دیگر و همچنین جلوگیری از غافل‌گیر شدن توسط رزمندگان حماس است. پس در این بین ما یک جنگ ناهمتراز خواهیم داشت.

برای این منظور مقدار $\boldsymbol{\delta t}$ = 0.01 در نظر گرفته شده است و مسئله تا زمان $\boldsymbol{T}$ = 10 و یا زمانی که نبرد خاتمه پیدا کند، شبیه‌سازی‌شده است. همچنین شرط اولیه برابر است با:

$$\boldsymbol{H(0)=1,\ \ I(0)=2}$$

بنابراین، جمعیت اولیه نیروهای H برابر 1 و جمعیت اولیه نیروهای I برابر 2 است. باید توجه کرد این اعداد به آن معنا نیست که گروه 1 متشکل از یک نفر و گروه 2 متشکل از

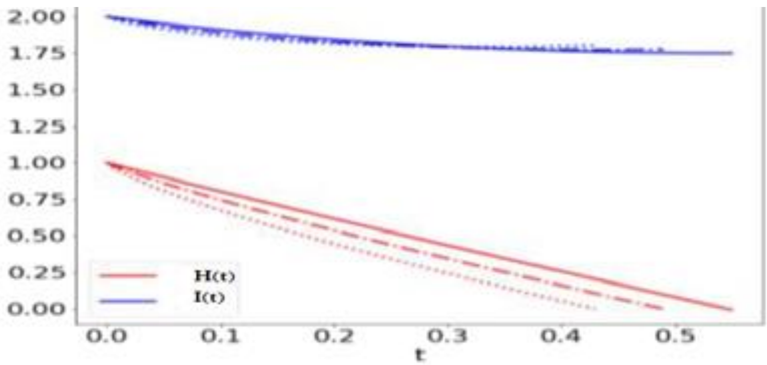
دو نفر است بلکه نشان‌دهنده واحد یگان‌های درگیر است که می‌تواند گردان و یا تیپ باشد.

اکنون رفتار مدل لانچستر کسری برای نبردی ناهمتراز بین حماس و رژیم صهیونیستی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم که فرمول‌بندی این مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha H(t) = -R_I(t)I(t) \\ {}_0^cD_t^\alpha I(t) = -R_H(t)H(t)\dfrac{I(t)}{2} \\ H(0) = 1 \quad\quad I(0) = 2 \end{cases}$$

که در آن نرخ تلفات هر دو یگان برابر است با $R_I(t) = I(t) = 1$.

رفتار این مدل به ازای مقادیر0.8 , .0 ,1 = α در شکل زیر به نمایش درآمده است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهند، با کاهش مرتبه مشتق ($\alpha \to 0$)، نبرد زودتر خاتمه پیدا می‌کند که این همان هدف اصلی ما است.



نمودار خط پیوسته برای، α=1 نمودار خط منقطع برای α=0.9 و نمودار نقطه‌چین برای α=0.8 است

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این پژوهش با استفاده از نظریه بازی‌ها سعی کردیم اقدام متقابل مناسبی در مقابل جنایت‌های رژیم صهیونیستی برای حماس به دست آوریم. در این راه با استفاده از بازهای مجموع صفر دو نفره اقدامات احتمالی رژیم صهیونیستی و حماس را مدل کرده و به روش

ماکسی مین بهترین پاسخ را برای حماس به دست آوردیم. سپس با استفاده از معادلات لانچستر کسری به تحلیل پاسخ به‌دست‌آمده پرداختیم.

قدردانی

در پایان محققین از کلیه خبرگان، صاحب‌نظران، محققین و پژوهشگرانی که با بذل وقت خویش در جهت غنای این اثر گام برداشته و پژوهشگران را یاری کردند، تشکر و قدردانی می‌کنند.

منابع

- اسحاقی، مجید، رشمه، امیرحسین. (۱۳۹۶). مدل‌سازی رفتار تروریست و تحلیل رفتار تروریسم، سیستم‌های مختلط و غیرخطی، دوره (۱).
- شریفی، فریده، (۱۳۹۶). فلسطین گذشته، حال، آینده: واکاوی جنبش‌های فلسطینی، تهران: زیارت، پیام بهاران.
- مسی بیگدلی، معصومه، کتابچی، سعید، نویدی، حمیدرضا. (۱۳۹۰). مدخلی بر نظریه بازی‌ها، دانشگاه شاهد.

- Abbasi, Ebrahim; Tabrizi, Zeinat (2015). A Study of the Relations between Iran and the Hamas Movement after the Islamic Awakening, Volume 6, Number 10 [In Persian].
- Abu amr, ziad (1993). Hamas political and historical background, Translated by Morteza Qanun, Political Science Quarterly, Preface No. 2. [In Persian]
- Afshon, Touraj; Allah Karam, Abdolhossein (2018). Comparison of the US security approach and the popular uprising in Iraq, Performance and Outlook, Volume 11, Number 42, pp. 72- 41 [In Persian]
- Ahmadian, Hassan (2013). Strategic Suggestions for Facing the New Hamas, Borhan Analytical Site. [In Persian]

- Azad, Amir Hamed (2016). The Bright Shadow of the Popular Rally, Tehran: Noor Institute of Thought Studies, 2016, pp. 21-25 [In Persian]
- Kress, M., Caulkins, J. P., Feichtinger, G., Grass, D., & Seidl, A. (2018). Lanchester model for three-way combat. *European Journal of Operational Research*, *264*(1), 46-54.