

شبیه‌سازی بازی جنگ زمینی با استفاده از معادلات دیفرانسیل لانچستر کسری

نادر بیرانوند^{۱*}

حمید بیگدلی^۲

محمد تقی پرتوی^۳

امیرحسین هادیان^۴

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

معادلات لانچستر در شبیه‌سازی بازی‌های جنگ و مدل‌سازی دینامیک جمعیت نیروهای جنگی گروه‌های درگیر در مناطق عملیاتی کاربردهای فراوانی دارد. این معادلات می‌توانند با در نظر گرفتن عواملی چون نرخ تلفات نیروهای خودی و نیروهای دشمن تخمینی را از جمعیت دو گروه در آینده فراهم سازد و نیروی پیروز جنگ را مشخص کند. با این حال، تمام محاسبات انجام شده در این مدل‌ها با توجه به تغییرات لحظه‌ای دینامیک‌های جمعیتی صورت می‌گیرد. در حالی که اتفاقاتی که در گذشته رخ داده است می‌توانند در تعیین وضعیت آینده نیروها تاثیر گذار باشند. به همین منظور، در این مقاله قصد داریم تا با استفاده از مشتقات کسری، مکانیزم حافظه را در معادلات لانچستر اضافه کنیم و از بعد نظامی آن را مورد آنالیز قرار دهیم. شمای عددی استفاده شده در این مقاله یک شمای چندگامی کسری آدامز-مولتن-بشفورث برای مشتقات کسری کاپوتو است که می‌تواند با پایداری و دقت بالا مسائل معادلات دیفرانسیل را شبیه‌سازی کند. نتایج بدست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که کاهش مرتبه مشتق در معادلات لانچستر و استفاده از حافظه در مدل، نرخ تلفات نسبت به مدل‌های عادی افزایش پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی:

معادلات لانچستر، حسابان کسری، مشتق کاپوتو، روش‌های چندگامی، شبیه‌سازی عددی.

۱. استادیار گروه ریاضی، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران.

۲. استادیار، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران.

۳. استادیار، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران.

۴. پژوهشگر، گروه علوم کامپیوتر، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران.

* نویسنده مسئول: Email: nabiranvand@gmail.com



مقدمه

بیش از هزار سال است که مردم از بازی‌ها برای تجزیه و تحلیل مشکلات و توسعه راه‌حل‌ها استفاده می‌کنند. در این بین، استفاده از بازی‌های جنگ به منظور شبیه‌سازی استراتژی‌های جنگی با هدف برتری یافتن در میدان جنگ بسیار مورد توجه و استفاده قرار گرفته‌است [۳۷]. به طور کلی، یک بازی جنگ، مدل و یا شبیه‌سازی‌ای است از میدان نبرد که در آن اعمال، رویه‌ها، پروتکل‌ها و نیز استراتژی‌های نیروهای نظامی پیاده‌سازی شده‌اند و با استفاده از آن می‌توان تخمینی از رویه جنگ را بدست آورد [۴۲]. بازی‌های جنگ فرصتی برای آزمایش فرضیه‌ها، ارائه راه‌های جایگزین و حل مشکلات استراتژی‌های در نظر گرفته شده فراهم می‌کنند [۳۷]. همچنین فرصت‌هایی را برای درک وضعیت‌های احتمالی آینده و توسعه مدل‌های تصمیم‌گیری سازگار با آن وضعیت‌ها را ارائه می‌دهند [۳۶]. در دهه‌های گذشته، استفاده از مدل‌های ریاضی توانست تحولی را در قدرت بازی‌های جنگ ایجاد کند و قابلیت استفاده در شرایط پیچیده را برای این مدل‌ها فراهم کند [۵۳]. یک دسته از این مدل‌ها که بسیار در بازی‌های جنگ مورد استفاده قرار گرفته‌اند مدل‌های دینامیکی توزیع استعداد یگان‌های درگیر در میدان جنگ بوده‌است [۶]، [۳۳].

مدل‌های دینامیکی توزیع نیروها از گذشته تاکنون، مورد توجه بسیاری از دانشمندان و پژوهشگران بوده‌است [۴]. لانچستر یک دانشمند معروف انگلیسی بود که اولین بار توانست یک مدل دینامیکی را برای اندازه جمعیت نیروهای درگیر در جنگ ارائه دهد [۳۳]. با استفاده از این مدل می‌توان نرم‌افزارهای مختلفی به منظور شبیه‌سازی بازهای جنگ ارائه داد که یکی از حوزه‌های کاربردهای صنعتی و تجاری این مدل است. به عنوان مثال می‌توان یک نرم‌افزار طراحی استراتژی پیاده‌سازی کرد که با استفاده از مدل‌های لانچستر بهترین استراتژی را از بین استراتژی‌های موجود به راهبر پیشنهاد دهد. از سویی دیگر می‌توان نرم‌افزاری تاکتیکی پیاده‌سازی کرد که با استفاده از آن بتوانیم تاکتیک پیروزی بر دشمن را بدست آوریم. یکی دیگر از کاربردهای این نرم‌افزارها می‌تواند آموزش نیروهای مختص در حوزه‌های مختلف نظامی باشد [۱]. همچنین می‌توان به عنوان روشی در تحلیل داده‌های نظامی در روش‌های مبتنی بر داده‌کاوی از این مدل‌ها به عنوان مدل‌های پارامتری استفاده کرد [۲]. این مدل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی به صورت زیر است [۳۳]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A(t) = -R_B B(t), & R_B > 0, \\ \frac{d}{dt}B(t) = -R_A A(t), & R_A > 0, \\ A(0) = A_0, & B(0) = B_0, \end{cases} \quad (1)$$

که در آن R_A و R_B به ترتیب نرخ تلفات نیروهای A و B هستند و A_0 و B_0 به ترتیب بیانگر جمعیت اولیه نیروهای A و B هستند و همچنین $A(t)$ و $B(t)$ اندازه جمعیت نیروهای A و B را در لحظه t نمایش می‌دهند. این معادله دیفرانسیل به دلیل سادگی و نیز تفسیرپذیری بالا توجه طیف وسیعی از دانشمندان حوزه‌های نظامی [۳۴]، اقتصادی [۲۷]، زیست‌شناسی [۸]، [۱۹] و اپیدمی‌شناسی [۳۲] را به خود جلب کرده‌است. مدل بیان شده در معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\frac{dA(t)}{dB(t)} = \frac{R_B B(t)}{R_A A(t)} \quad (۲)$$

حال با ضرب کردن طرفین معادله در $R_A A(t) dB(t)$ و انتگرال‌گیری از دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$R_A \int_{A_0}^{A(t)} A(t) dA(t) = R_B \int_{B_0}^{B(t)} B(t) dB(t), \quad (۳)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$R_A (A_0^2 - A^2(t)) = R_B (B_0^2 - B^2(t)). \quad (۴)$$

به این قاعده، قانون مربعی لانچستر گویند [۲۳]، [۲۵]. به عبارت دیگر، در هر لحظه از زمان می‌توان با داشتن جمعیت یکی از گروه‌های درگیر، جمعیت گروه دیگر را تخمین زد. این مدل بیانگر آتش مستقیم بین دو یگان درگیر در میدان جنگ است (مانند استفاده از موشک، تانک، جنگنده و غیره) و تخمین آینده اندازه جمعیت هر گروه تنها به اندازه کنونی مدل بستگی دارد. اما باید به این نکته توجه داشت که فرض مدل آن است که با هر با انجام آتش تعداد مشخصی از افراد کشته خواهند شد. اما این فرض در واقعیت رخ نمی‌دهد. زیرا ممکن است با فرد زخمی شود و یا از سپرهای دفاعی استفاده کند. بنابراین یکی از نقاط ضعف اصلی این مدل در نظر گرفتن یک محیط قطعی برای نبرد است که می‌توان

آنرا با در نظر گرفتن یک عبارت تصادفی در مدل برطرف کرد. از طرف دیگر، در برخی از حالات، دشمن از تاکتیک‌های غیر مستقیم برای ایجاد تلفات در نیروها استفاده می‌کند (مانند استفاده از آتش توپخانه و خمپاره) که معروف به آتش غیر مستقیم است. این مدل از معادلات لانچستر را می‌توان با استفاده از فرم غیرخطی زیر بیان کرد [۶]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A(t) = -R_B A(t)B(t), & R_B > 0, \\ \frac{d}{dt}B(t) = -R_A A(t)B(t), & R_A > 0, \\ A(0) = A_0, & B(0) = B_0. \end{cases} \quad (5)$$

مشابه قانون مربعی، می‌توان به معادله تعادلی مشابهی برای این فرم از معادلات لانچستر نیز دست یافت که به آن قانونی خطی لانچستر گویند [۵۰] و به صورت زیر است:

(۶)

$$R_A(A_0 - A(t)) = R_B(B_0 - B(t)).$$

یکی از فرضیه‌های مهم مدل‌های لانچستر بیان شده در معادلات (۱) و (۵) آن است که نرخ ایجاد تلفات یگان‌های درگیر در طول زمان ثابت در نظر گرفته می‌شود. اما این فرضیه کمی دور از واقعیت است و در میدان نبرد، نرخ تلفات می‌تواند در طول زمان تغییر کند. در نتیجه مدل لانچستر با ضرایب وابسته زمان ارائه شد که یکی دیگر از تعمیم‌های مهم معادلات لانچستر است [۵۱] و می‌تواند برای آتش مستقیم یا آتش غیر مستقیم به یکی از دو صورت زیر بیان شود. بنابراین برای نبردهای آتش مستقیم داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A(t) = -R_B(t)B(t), & R_B > 0, \\ \frac{d}{dt}B(t) = -R_A(t)A(t), & R_A > 0, \\ A(0) = A_0, & B(0) = B_0. \end{cases} \quad (7)$$

همچنین برای نبردهای با آتش غیر مستقیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A(t) = -R_B(t)B(t)A(t), & R_B > 0, \\ \frac{d}{dt}B(t) = -R_A(t)A(t)B(t), & R_A > 0, \\ A(0) = A_0, & B(0) = B_0, \end{cases} \quad (۸)$$

از طرف دیگر، مدل‌های بیان شده مبتنی بر این اصل هستند که هر دو یگان درگیر، از یک تاکتیک یکسان برای جنگ استفاده می‌کنند. به عبارت دیگر، هر دو یگان از یک نوع آتش (مستقیم یا غیر مستقیم) استفاده می‌کنند. اما ممکن است تاکتیک‌ها متفاوت باشند و در نتیجه، یک نبرد ناهم‌تراز داشته باشیم که یکی از یگان‌ها از تاکتیک آتش مستقیم و دیگری از تاکتیک آتش غیر مستقیم استفاده کند. بنابراین، برای اینگونه نبردها معادلات لانچستر به صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}A(t) = -R_B B(t), & R_B > 0, \\ \frac{d}{dt}B(t) = -R_A A(t) \frac{B(t)}{B(0)}, & R_A > 0, \\ A(0) = A_0, & B(0) = B_0, \end{cases} \quad (۹)$$

که در آن نیروهای B از آتش مستقیم و نیروهای A از آتش غیر مستقیم استفاده می‌کنند. همچنین مشابه مدل‌های لانچستر برای نبردهای هم‌تراز، می‌توان یک معادله تعادلی به شکل زیر برای مدل لانچستر نبردهای ناهم‌تراز بدست آورد:

(۱۰)

$$\frac{R_A}{2}(A_0^2 - A^2(t)) = R_B(B_0^2 - B_0B(t)).$$

با توجه به کاربردهای بسیار زیاد این معادله، توسیع‌های دیگری از این مدل در سال‌های گذشته معرفی شده‌است. برای مثال، در [۳۰] نویسندگان معادلات لانچستر را برای سه گروه درگیر توسعه داده‌اند که در آن ابتدا تا زمان t_1 یک دستگاه معادله دیفرانسیل با سه تابع مجهول داریم و سپس با صفر شدن جمعیت یکی از گروه‌های درگیر در زمان t_2 ، دستگاه معادلات تبدیل به یک دستگاه با دو تابع مجهول خواهد شد و دینامیک مسئله ادامه پیدا می‌کند. با توسعه این معادلات همچنین توزیع جمعیت نیروهای درگیر در جنگ‌های نامنظم [۲۹] و جنگ‌های هوشمند [۶] را می‌توان مدلسازی کرد. علاوه

بر این، دسته‌ای دیگر از معادلات لانچستر وجود دارد که در آن علاوه بر بعد زمانی اندازه جمعیت، بعد مکانی اندازه جمعیت نیز به معادلات اضافه شده‌است و معادله قادر است تا مکان توزیع جمعیت را نیز در طول زمان تقریب بزند [۲۱]، [۲۸]، [۴۴].

اما یکی از محدودیت‌های اصلی در معادلات لانچستر، عدم وجود مکانیزم حافظه است. به بیان دیگر، در هر لحظه از زمان حالت آینده سیستم، تنها به حالت کنونی سیستم وابسته است و سیستم هیچگونه حافظه‌ای از اتفاقاتی که تا کنون برای آن افتاده است ندارد. در حالی که در نبردهای واقعی یگان‌های درگیر با مواردی همچون خستگی، تلفات، کاهش روحیه و غیره مواجه هستند که سبب می‌شوند، نه تنها حالت کنونی سیستم بلکه حالت‌های قبلی سیستم نیز در آینده آن اثر گذار باشند. بنابراین، وجود مکانیزم حافظه در مدل‌های لانچستر سبب می‌شود تا مدل بتواند اثرات خستگی، آسیب دیدگی و نیز کاهش روحیه را که باعث افت عملکرد نیروها می‌شود را در نظر بگیرد و در نتیجه شبیه‌سازی بهتر و دقیق‌تری از استراتژی‌های اتخاذ شده در بازی جنگ را داشته باشیم و شبیه‌سازی‌های بازی جنگ به واقعیت میدان نبرد نزدیک‌تر باشند. به همین خاطر، در این مقاله سعی داریم تا با استفاده از مفهوم مشتق کسری کاپوتو، به مدل‌سازی مکانیزم حافظه در مدل پردازیم و سپس دینامیک مدل کسری را با دینامیک مدل غیر کسری مقایسه نماییم. لازم به ذکر است استفاده از مشتقات کسری به منظور مدل‌سازی حافظه در سیستم‌های دینامیکی در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی از این چارچوب برای اضافه کردن حافظه به مدل‌های دینامیکی استفاده شده‌است [۱۶]، [۴۹].

ساختار ادامه این مقاله به صورت زیر است. در بخش دوم به بررسی کارهای مرتبط در این حوزه خواهیم پرداخت. بخش سوم شامل روش پیشنهادی ارائه شده در این مقاله خواهد بود، مقدمات حسابان کسری و عملگرهای مشتق کسری و خاصیت‌های آن‌ها را در این بخش بررسی خواهیم کرد. سپس، مدل‌سازی معادلات لانچستر کسری که صورت کلی معادلات لانچستر هستند را ارائه می‌دهیم و از بعد نظامی مورد تحلیل و بررسی قرار خواهیم داد و یک شمای چندگامی را به منظور شبیه‌سازی عددی دینامیک‌های کسری در پایان این بخش ارائه خواهد شد. در بخش چهارم با ارائه چند مثال عددی، رفتار مدل بیان شده را بررسی خواهیم کرد و در بخش پایانی به نتیجه‌گیری از این پژوهش این می‌پردازیم و چند پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی ارائه خواهیم داد.

کارهای مرتبط

در سال‌های اخیر استفاده از مدل‌های کسری برای توصیف پدیده‌های فیزیکی گوناگون در فیزیک (، اقتصاد (، مدیریت (، علوم اعصاب (و غیره مورد استفاده قرار گرفته‌است. نکته حائز اهمیت در این مدل‌ها آن است که تعریف مشتق کسری استفاده شده باید با فیزیک مسئله تعریف شده سازگار باشد. به همین خاطر مشتقات کسری بسیاری از قبیل مشتق کاپوتو، مشتق ریمان، مشتق آتانجانا-بالنو و غیره معرفی شده‌اند که می‌توان از آن‌ها برای مدل‌سازی مسائل مختلف استفاده کرد. همچنین مطالعه عددی معادلات کسری یکی از حوزه‌های پژوهشی است که در سال‌های اخیر توجه دانشمندان بسیاری

را به خود جلب کرده است. به عنوان مثال، در مطالعات متعددی پژوهشگران به ارائه روش‌های عددی مبتنی ماتریس‌های عملگر بر پایه توابع متعامدی نظیر لژاندر [۴۷]، چیشیف [۱۴] و ژاکوبی [۱۵] برای حل معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته‌اند، در [۴۰] برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از روش‌های بردار پشتیبان بررسی شده‌است و در [۲۲]، [۴۱] از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای حل و شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده‌است.

از طرف دیگر، دسته‌های مختلفی از مدل دینامیک جمعیت در سال‌های گذشته برای تحلیل و بررسی سیستم‌های سیستم‌های جمعیتی مورد استفاده قرار گرفته است که معروف‌ترین آن‌ها که قابلیت مدلسازی مدل‌های لانچستر با آتش مستقیم یا غیر مستقیم را نیز دارد مدل‌های شکار-شکارچی هستند. این مدل شباهت بسیار زیادی با مدل لانچستر دارد و در بسیاری از حوزه‌های علوم مورد استفاده قرار گرفته‌است [۱۹]. در این مدل جمعیت‌های دو گروه شکار و شکارچی در زمان به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مدلسازی می‌شود که در آن می‌توان با استفاده از نرخ تولد و مرگ شکارچی و نیز تولد و مرگ شکار جمعیت هر دو گروه را در هر زمان می‌توان بدست آورد. از این مدل به بیولوژی برای شبیه‌سازی اندازه جمعیت سلول‌های سرطانی و یا در مبحث شبیه‌سازی جمعیت‌های ناقل بیماری مورد استفاده قرار گرفته‌است. برای مرور بیشتر در رابطه با این مدل می‌توانید به [۵۴] مراجعه کنید. از سویی دیگر، مطالعه عددی این معادله نیز بسیار مورد علاقه دانشمندان در سال‌های اخیر بوده است که در جدول (۱) خلاصه‌ای از این روش‌ها بیان شده‌است.

جدول (۱) پیشینه تحقیقات عددی انجام شده بر روی مدل‌های شکار-شکارچی

سال	مدل	روش
[۹] ۲۰۱۳	شکار-شکارچی در دامنه‌های بزرگ	طیفی مبتنی بر پایه‌های لژاندر
[۴۳] ۲۰۱۸	شکار-شکارچی کسری	جایگذاری مبتنی بر پایه‌های اسپلاین
[۳] ۲۰۱۹	شکار-شکارچی کسری تاخیری	آدامز-مولتن
[۷] ۲۰۱۹	شکار-شکارچی کلی	تفاضل‌های متناهی غیر استاندارد
[۳۱] ۲۰۲۰	شکار-شکارچی کسری	اویلر و موجک‌های برنشتاین
[۴۵] ۲۰۲۰	شکار-شکارچی همراه با مهاجرت شکار	آشفستگی هموتوپی
[۳۹] ۲۰۲۱	شکار-شکارچی کسری چند بعدی	تفاضل متناهی
[۵] ۲۰۲۱	شکار-شکارچی کسری با بازخورد	طیفی مبتنی بر پایه‌های مدال لاگر

همچنین در برخی از مطالعات، این مدل با انواع دیگر مشتق کسری نظیر آتانجانا-بالنو [۲۰] و یا مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو [۲۶] مطالعه شده و رفتار آن مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

روش پیشنهادی

مروری بر حسابان کسری

حسابان کسری را می‌توان به عنوان تعمیم حسابان مرتبه صحیح در نظر گرفت که در آن عملگرهای مشتق و انتگرال از هر مرتبه دلخواه حقیقی تعریف می‌شوند. پیشینه مشتقات کسری به نامه‌ای که هوپیتال به لایبنیتز در سال ۱۶۹۵ نوشت باز میگردد که در آن نامه هوپیتال درباره مفهوم و نحوه تعریف مشتق با مرتبه نیم از لایبنیتز سوال کرده بود [۳۸]، [۴۶]. به منظور تعریف عملگر مشتق کسری ابتدا نیاز است تا عملگر انتگرال کسری را تعریف کنیم. به طور کلی عملگر انتگرال مرتبه n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}_0I_t^n f(t) &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

به منظور تعمیم این عملگر به حالت کسری می‌توان از تابع گاما که به صورت $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-st} z^{-1} ds$ تعریف می‌شود استفاده کرد و با جایگذاری این تابع به جای تابع فاکتوریل، عملگر انتگرال کسری به صورت زیر بدست خواهد آمد [۳۸]:

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (12)$$

که به این عملگر، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیویل از مرتبه α گویند. حال با در دست داشتن این عملگر می‌توان عملگر مشتق کسری را به دو صورت زیر تعریف کرد:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} ({}^{RL}I_t^{\alpha} f(t)) \quad \checkmark \text{ عملگر مشتق کسری ریمان-لیویل:}$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^C I_t^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) \quad \checkmark \text{ عملگر مشتق کسری کاپوتو:}$$

به بیان دیگر، عملگر مشتق کسری ریمان-لیویل به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۸]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

و نیز عملگر مشتق کسری کاپوتو برابر است با [۳۸]:

$${}^C_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m \quad (14)$$

$\in \mathbb{N}.$

همانطور که از تعریف مشتق کسری کاپوتو و تفسیر فیزیکی آن مشخص است این تعریف، یک جمع وزن دار از مقادیر مشتق مرتبه m تابع، از زمان 0 تا t است. بنابراین می‌تواند بیانگر حافظه در مدل باشد. به بیان دیگر، در صورتی که $0 < \alpha < 1$ این مشتق، تغییرات لحظه‌ای (مشتق مرتبه اول تابع) از زمان 0 تا t را با استفاده از انتگرال تجمیع می‌کند. به همین خاطر، اثر تمام تغییرات از لحظه 0 تا لحظه t در این مشتق وجود دارد و از این طریق می‌تواند ابزاری برای بیان حافظه در مدل باشد [۲۴]. لازم به ذکر است که مشتق کاپوتو و مشتق ریمان-لیویل خواص بسیار مشابهی دارند و در فضاهای نامتناهی و یا نیمه نامتناهی همانند یکدیگر رفتار می‌کنند. همچنین رابطه زیر بین دو مشتق ریمان-لیویل و کاپوتو برقرار است [۳۸]:

$${}^{RL}_0D_t^\alpha f(t) = {}^C_0D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t)^{k-\alpha}. \quad (15)$$

لازم به ذکر است، علاوه بر دو تعریف ریمان-لیویل و کاپوتو، تعریف‌های دیگری نیز برای عملگر مشتق کسری در سال‌های گذشته ارائه شده‌است که می‌توان از بین آن‌ها به عملگر مشتق کسری آتانجانا-بالنو و یا کاپوتو-فابریزیو اشاره کرد (خوانندگان علاقمند می‌توانند برای مرور بیشتر بر روی عملگرهای کسری به [۵۲] مراجعه کنند). دربخش بعدی به معرفی و بررسی معادلات کسری لانچستر خواهیم پرداخت و تفسیر آن را بیان خواهیم کرد.

مدل کسری لانچستر

همانطور که مطرح شد، هدف از این پژوهش شبیه‌سازی و بررسی رفتار مدل کسری لانچستر است که مکانیزم حافظه را در مدل مورد مطالعه قرار می‌دهد. که در آن جنگ‌های ناهم‌تراز و مکانیزم‌های آتش مستقیم و غیر مستقیم قابل پیاده‌سازی است:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha A(t) = -R_B(t)F_1(A(t), B(t)), \\ {}^C_0D_t^\alpha B(t) = -R_A(t)F_2(A(t), B(t)), \\ A(0) = A_0, \quad B(0) = B_0, \end{cases} \quad (16)$$

که در آن $A(t)$ و $B(t)$ به ترتیب نشان دهنده جمعیت دو یگان درگیر هستند. اگر $F_1(A(t), B(t)) = B(t)$ و $F_2(A(t), B(t)) = A(t)$ باشد، معادله (۱۶) نشان دهنده نبرد متقارن با آتش مستقیم است، اگر $F_1(A(t), B(t)) = F_2(A(t), B(t)) = A(t)B(t)$ باشد،

نشان دهند نبرد متقارن با آتش غیر مستقیم است و اگر $F_1(A(t), B(t)) \neq F_2(A(t), B(t))$ نشان دهنده یک نبرد نامتقارن است. همانطور که در زمان تعریف مشتق کسری کاپوتو متذکر شدیم، این تعریف بیانگر نوعی حافظه در مدل [۲۴]. به بیان دیگر، این عملگر، با استفاده از مجموع تمام تغییرات لحظه‌ای از زمان تا زمان، تغییرات لحظه کنونی را مشخص می‌کند. بنابراین روند تغییرات اندازه جمعیت‌ها از لحظه اول تا لحظه کنونی در مشخص کردن اندازه جمعیت در گام بعدی بسیار موثر است. این مدل تفسیری واقعی‌تر از دینامیک جمعیت را در میدان جنگ بیان می‌کند. برای مثال در نظر بگیرید که در لحظه پیش دشمن با نرخ بسیار زیادی به نیروهای خودی صدمه وارد کرده است، این صدمه می‌تواند تاثیراتی مانند خستگی در افراد، کاهش روحیه در آن‌ها و نیز کاهش توان رزمی را در پی داشته باشد که در آینده جنگ موثر است. اما مدل‌های مرتبه صحیح تنها اندازه جمعیت لحظه کنونی را در پیش‌بینی آینده مدل اثر می‌دهد که امری غیر واقعی است و افراد درگیر در جنگ همواره تحت تاثیر اتفاقات گذشته هستند. همچنین اگر $\alpha = 1$ معادله (۱۶) به یک معادله از مرتبه صحیح تبدیل خواهد شد و مکانیزم حافظه از مدل حذف خواهد شد. به همین خاطر مدل کسری (۱۶) فرم تعمیم یافته مدل‌های لانتچستر بیان شده است و در نتیجه توان بیشتری در تبیین دینامیک جمعیتی نیروهای درگیر دارد.

روش‌های چندگامی کسری

یکی از روش‌های قدرتمند در حل و شبیه‌سازی عددی معادلات دیفرانسیل، روش‌های چندگامی هستند. اساس کار این دسته از روش‌ها تقریب تابع مجهول در نقاط گسسته متساوی الفاصله در داخل دامنه است [۱۱]. روش‌های چندگامی تاریخچه‌ای طولانی دارند و در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اما روش‌های چندگامی کسری، به دلیل پیچیدگی‌های عملگر مشتق کسری، در سال‌های اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است و شماهای محاسباتی متفاوتی برای تقریب این نوع عملگر ارائه شده است که از جمله آن می‌توان به شماهای آدامز [۳۵]، آدامز-بشفورث [۱۲]، آدامز-مولتن [۱۷] و یا شماهای مرتبه سه آدامز [۵۵] اشاره کرد. در این مقاله از شماهای دو مرحله‌ای آدامز-بشفورث-مولتن استفاده خواهیم کرد که در ادامه به تفصیل آن‌را بیان می‌کنیم. به منظور ارائه شماهای مورد نظر، می‌توان فرم کلی معادلات دیفرانسیل کسری را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} {}^c_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots [\alpha]. \end{cases} \quad (17)$$

که در آن $[\cdot]$ نشان دهنده تابع سقف است. می‌توان این معادله دیفرانسیل مقدار اولیه را به صورت یک معادله انتگرال ولترا به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau, y(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (18)$$

حال با استفاده از تقریب‌های متفاوت برای انتگرال ظاهر شده در فرمول بالا می‌توان شمای متفاوتی را بدست آورد. برای بدست آوردن شمای پیش‌بینی کننده، جمله انتگرالی را با استفاده از قاعده ضربی مستطیلی تقریب خواهیم زد که نتیجه می‌دهد [۱۳]:

$$y^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{|\alpha|-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \beta_{j,n+1} f(t_j, y(t_j)), \quad (19)$$

که در آن:

$$\beta_{j,n+1} = \frac{\delta t^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha). \quad (20)$$

بنابراین، می‌توانیم مقدار پیش‌بینی کننده تابع مجهول $y(t)$ را در زمان t_{n+1} با استفاده از این فرمول بدست آوریم. سپس با استفاده از قاعده ضربی دوزنقه‌ای به شمای تصحیح کننده دست خواهیم یافت که به صورت زیر است [۱۳]:

$$y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{|\alpha|-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{\delta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[f(t_{n+1}, y^p(t_{n+1})) + \sum_{j=0}^n \lambda_{j,n+1} f(t_j, y(t_j)) \right], \quad (21)$$

که در آن:

$$\lambda_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & \text{if } j=0, \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} & \text{if } 1 \leq j \leq n, \\ 1, & \text{if } j=n+1, \end{cases} \quad (22)$$

به طور کلی، روش‌های عددی چندگامی کسری را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۸]، [۵۵]:

$$\sum_{j=0}^k \theta_j y_{n-j} = h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_j f(t_{n-j}, y_{n-j}), \quad (23)$$

به منظور تعیین مرتبه یک روش چندگامی می‌توانیم از تعریف زیر استفاده کنیم.

تعریف (۴-۱): یک روش خطی چند گامی را مرتبه p گویند اگر و تنها اگر، $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ و $C_{p+1} \neq 0$ به طوری که داشته باشیم:

$$C_p = \sum_{j=0}^k \left[\frac{j^p \theta_j}{p!} - \frac{j^{p-1} \omega_j}{(p-1)!} \right], \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

با توجه به تعریف (۱) و نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که مرتبه همگرایی روش آدامز-مولتن-بشفورث ارائه شده در این مقاله از مرتبه ۲ است و همچنین این روش از پایداری بالایی برخوردار است [۱۳]. به همین دلیل استفاده از این روش عددی در محیط‌های واقعی مانند محیط‌های نظامی، ارجحیت بالای روش ارائه شده را نشان می‌دهد، زیرا این روش علاوه بر پایداری بالا و همگرایی مناسب، از سرعت اجرای بسیار خوبی برخوردار است.

تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این بخش چند شبیه‌سازی عددی از رفتار مدل ارائه شده، با استفاده از الگوریتم آدامز-بشفورث-مولتن را ارائه خواهیم داد. بنابراین با استفاده از شمای پیش‌بینی کننده-تصحیح کننده ارائه در فرمول‌های (۱۹) و (۲۱) رفتار مدل لانچستر کسری ارائه شده را در شبیه‌سازی خواهیم کرد. در تمامی مثال‌ها مقدار $\delta t = 0.01$ در نظر گرفته شده‌است و مسئله تا زمان $T = 10$ و یا زمانی که نبرد خاتمه پیدا کند، شبیه‌سازی شده‌است. همچنین شرط اولیه هر چهار مثال ارائه شده در این بخش برابر است با:

$$A(0) = 1, \quad B(0) = 2.$$

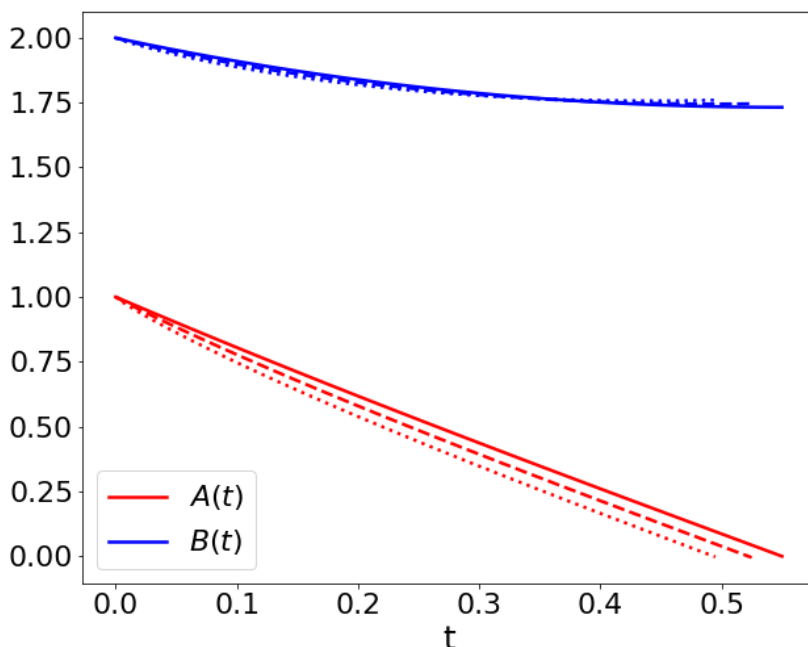
بنابراین جمعیت اولیه نیروهای A برای ۱ و جمعیت اولیه نیروهای B برابر ۲ است. باید توجه کرد این عدد به آن معنا نیست که گروه ۱ متشکل از یک نفر و گروه ۲ متشکل از دو نفر است بلکه نشان دهند واحد یگان‌های درگیر است که می‌تواند گردان و یا تیپ باشد. بعد از استفاده از شمای عددی ارائه شده و شبیه‌سازی مدل (۱۶)، اندازه جمعیت هر یک از یگان‌های درگیر در طول زمان بدست خواهد آمد.

مثال ۱

در مثال اول، مدل لانچستر کسری نبرد متقارن با آتش مستقیم را در نظر می‌گیریم که فرمول‌بندی آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha A(t) = -R_B(t)B(t), \\ {}^C_0D_t^\alpha B(t) = -R_A(t)A(t), \\ A(0) = 1, \quad B(0) = 2 \end{cases} \quad (25)$$

که در آن $R_A(t) = R_B(t) = 1$ بنابراین، نرخ تلفات هر دو گروه درگیر برابر است. رفتار این مدل به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.95, 0.9$ در شکل (۱) به نمایش در آمده است.



شکل (۱) نتایج شبیه‌سازی معادله (۲۵) به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.95, 0.9$ که در آن نمودار خط پیوسته برای $\alpha = 1$ ، نمودار خط منقطع برای $\alpha = 0.95$ و نمودار نقطه چین برای $\alpha = 0.9$ است. همانطور که قابل مشاهده است، با کاهش مرتبه مشتق ($\alpha \rightarrow 0$) نبرد زودتر خاتمه پیدا می‌کند و همچنین نیروهای پیروز میدان کمتر تلفات می‌دهند. کاهش مرتبه مشتق به معنی آن است که مدل از حافظه گذشته خود به میزان بیشتری استفاده کند. شکل (۱) نشان می‌دهد با افزایش میزان اثر حافظه در مدل آتش مستقیم نیروهای گروه **A** زودتر شکست می‌خورند. این پدیده در واقعیت نیز این‌گونه قابل تفسیر است که با ایجاد نرخ تلفات در یکی از گروه‌های درگیر میزان روحیه در سایر نیروها نیز کاهش پیدا می‌کند که باعث افزایش نرخ تلفات آن گروه خواهد شد. بنابراین با افزایش

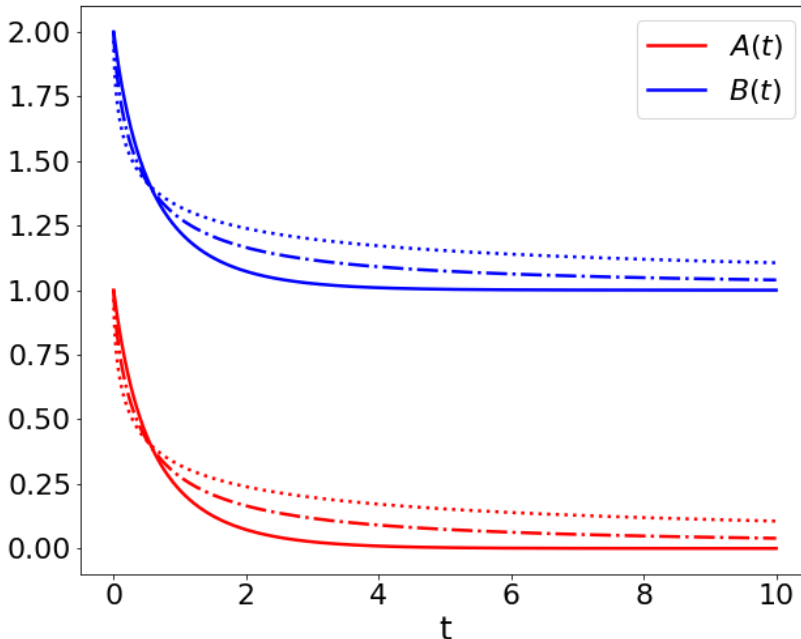
میزان اثر حافظه در مدل، می‌توان دید که مدل مرتبه کسری نشان می‌دهد که می‌توان با عوامل دیگری در صحنه نبرد نرخ تلفات را در نیرو دشمن افزایش داد.

مثال ۲

در این مثال قصد داریم، مدل لانچستر کسری برای نبردهای هم‌تراز با آتش غیر مستقیم را مورد بحث قرار دهیم که فرم آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha A(t) = -R_B(t)A(t)B(t), \\ {}^C_0D_t^\alpha B(t) = -R_A(t)A(t)B(t), \\ A(0) = 1, \quad B(0) = 2 \end{cases} \quad (26)$$

که در آن $R_A(t) = R_B(t) = 1$ و این بیانگر آن است که نرخ تلفات هر دو یگان برابر ۱ است. رفتار این مدل به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.8, 0.6$ در شکل (۲) به نمایش در آمده است.



شکل (۲) نتایج شبیه‌سازی معادله (۲۶) به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.8, 0.6$ که در آن نمودار خط پیوسته برای $\alpha = 1$ ، نمودار خط منقطع برای $\alpha = 0.8$ و نمودار نقطه چین برای $\alpha = 0.6$ است.

نتایج نشان داده شده در شکل (۲) بیانگر آن است که با کاهش مرتبه مشتق، مدل زودتر به حالت تعادلی می‌رسد. همچنین با کاهش مقدار مرتبه مشتق شاهد کاهش تلفات در هر دو یگان هستیم. از سویی دیگر این نمودار یک اصل مهم نظامی را بیان می‌کند که نشان از اهمیت آتش مستقیم و نیروهای زمینی دارد و آن اصل آن است که با استفاده از آتش غیر مستقیم مانند حملات توپخانه و

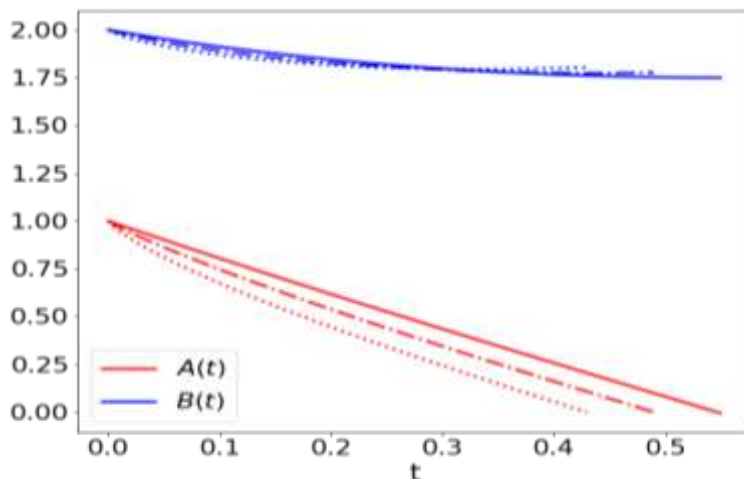
بمباران و غیره نمی‌توان به طور کامل نیروی دشمن را نابود کرد و بعد از مدتی درگیری توان رزمی هر دو یگان به حالت پایداری تبدیل خواهد شد. در اینجا با مقایسه نتایج شکل (۲) با نتایج شکل (۱) به این نتیجه خواهیم رسید که در مدل آتش مستقیم، با افزایش میزان اثر حافظه در مدل میزان تلفات نیروهای گروه A افزایش پیدا می‌کند در حالی که در مدل آتش غیر مستقیم این میزان تلفات کاهش پیدا می‌کند. که این موضوع نشان دهنده آن است که یک نبرد طولانی مدت با استفاده از آتش غیر مستقیم نمی‌تواند تلفات زیادی را به دشمن وارد کند و شاید بعد از مدتی ادامه نبرد با آتش غیر مستقیم حتی از نظر اقتصادی به صرفه نباشد. پس در نتیجه باید همواره استراتژی مورد استفاده در هنگام نبرد را مورد بررسی قرار داد تا بتوان بالاترین راندمان را در صحنه نبرد داشت.

مثال ۳

در این مثال، رفتار مدل لانچستر کسری برای نبردهای ناهم‌تراز را در نظر می‌گیریم که فرمول‌بندی این مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha A(t) = -R_B(t)B(t), \\ {}^C_0D_t^\alpha B(t) = -R_A(t)A(t)\frac{B(t)}{2}, \\ A(0) = 1, \quad B(0) = 2 \end{cases} \quad (27)$$

که در آن نرخ تلفات هر دو یگان برابر است با $R_A(t) = R_B(t) = 1$. رفتار این مدل به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در شکل (۳) به نمایش در آمده است. همانطور که نتایج نشان می‌دهند، مشابه مثال ۱، با کاهش مرتبه مشتق، نبرد زودتر خاتمه پیدا می‌کند. اما در مقایسه با مثال ۱ (مدل لانچستر نبرد هم‌تراز با آتش مستقیم) زمان خاتمه نبرد کاهش پیدا کرده است که این موضوع بیانگر آن است که نبردهای ناهم‌تراز در زمان کوتاه‌تری نسبت به نبردهای هم‌تراز خاتمه پیدا می‌کنند.



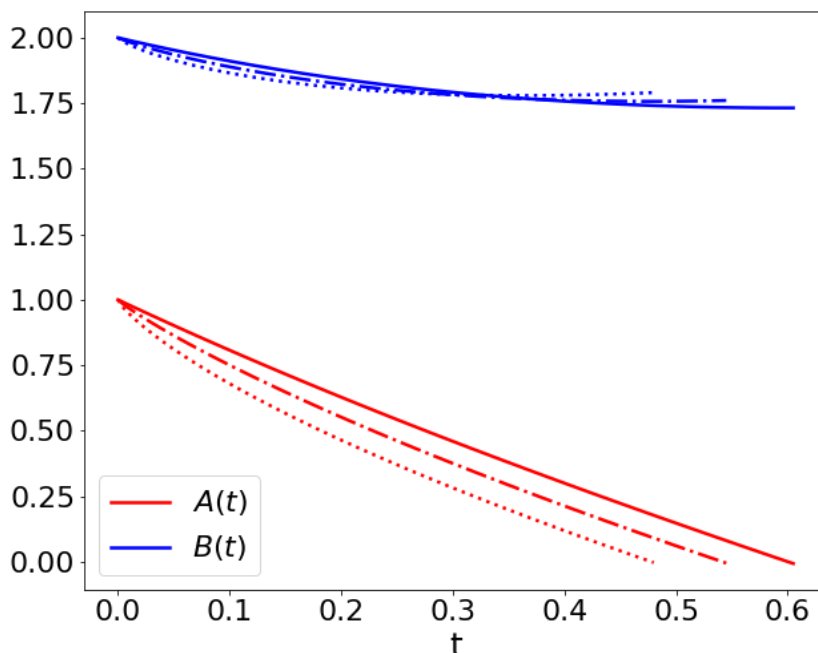
شکل (۳) نتایج شبیه‌سازی معادله (۲۷) به ازای مقادیر $\alpha=1, 0.9, 0.8$ که در آن نمودار خط پیوسته برای $\alpha=1$ ، نمودار خط منقطع برای $\alpha=0.9$ و نمودار نقطه چین برای $\alpha=0.8$ است.

مثال ۴

در مثال پایانی، مدل لانچستر کسری را با نرخ تلفات وابسته به زمان برای یک نبرد متقارن با آتش مستقیم در نظر می‌گیریم که معادله آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha A(t) = -R_B(t)B(t), \\ {}^C_0D_t^\alpha B(t) = -R_A(t)A(t), \\ A(0) = 1, \quad B(0) = 2 \end{cases} \quad (28)$$

که در آن $R_A(t) = e^{-0.3t}$ و $R_B(t) = e^{-0.1t}$ که بیانگر آن است که نرخ تلفات هر دو یگان در طول زمان کاهش پیدا می‌کند و این کاهش برای گروه A سریع‌تر است. رفتار این مدل به ازای مقادیر $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در شکل (۴) به نمایش در آمده است.



شکل (۴) نتایج شبه‌سازی معادله (۲۸) به ازای مقادیر $\alpha=1, 0.9, 0.8$ که در آن نمودار خط

پیوسته برای $\alpha=1$ ، نمودار خط منقطع برای $\alpha=0.9$ و نمودار نقطه چین برای $\alpha=0.8$ است.

در مقایسه نتایج بدست آمده از این مثال با مثال یک می‌توان نتیجه گرفت که زمان خاتمه نبرد طولانی‌تر شده‌است و که به دلیل آن است که نرخ تلفات هر دو یگان با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه مدت زمان نبرد طولانی‌تر خواهد شد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله سعی شد تا مدل کسری لانچستر را به عنوان حالتی خاص از مدل کسری شکار-شکارچی ارائه شود و تفسیر نظامی آن را بیان شود. همچنین مکانیزم حافظه در معادله با استفاده از مشتق کسری مدلسازی شده‌است. به علاوه با ارائه یک روش عددی چندگامی به نام آدامز-بشفورث-مولتن، به مطالعه عددی این معادله پرداخته شد و رفتار مدل مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده از شبه‌سازی رفتار مدل نشان می‌دهند که معادله کسری سبب تغییر رفتار مدل می‌شود و سرعت خاتمه نبرد را افزایش می‌دهد که این موضوع نتیجه اضافه شدن مکانیزم حافظه به مدل است. از طرف دیگر، این نتایج بیانگر پایداری و دقت مناسب الگوریتم عددی استفاده شده در این مقاله است. هرچند که در این مطالعه و همچنین برخی از مطالعات دیگر، شبه‌سازی عددی این معادله به خوبی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌است. اما در کاربردهای نظامی مبحث تخمین پارامتر مدل نیز از اهمیت

بالایی برخوردار است و باید در مطالعات آتی به مبحث تخمین پارامترهای مدل از روی داده‌های نیز توجه شود.

منابع

[1] مرادیان، محسن؛ شعبانی فرد، علیرضا و کلانتری فتح الله. (۱۳۹۳). تاثیر به‌کارگیری فناوری اطلاعات بر توسعه و توانمندی منابع انسانی دانشگاه‌های افسری آجا. *فصلنامه علوم و فنون نظامی*، ۱۰ (۳۰).

[2] مرادیان، محسن؛ مومنی فرد، حسین و پرتوی، محمد تقی. (۱۳۹۴). کاربردهای داده‌کاوی در تصمیم‌گیری فرماندهان و مدیران نظامی. *فصلنامه علون و فنون نظامی*، ۱۱ (۳۱).

[3] Alidousti, J. , & Ghahfarokhi, M. M. (2019). Stability and bifurcation for time delay fractional predator prey system by incorporating the dispersal of prey. *Applied Mathematical Modelling*, 72, 385-402.

[4] Atkinson, M. P. , Gutfraind, A. , & Kress, M. (2012). When do armed revolts succeed: lessons from Lanchester theory?. *Journal of the Operational Research Society*, 63(10), 1363-1373.

[5] Biranvand, N. , Vahidi, A. R. , & Babolian, E. (2021). An improved model along with a spectral numerical simulation for fractional predator-prey interactions. *Engineering with Computers*, 1-14.

[6] Coulson, S. G. (2019). Lanchester modelling of intelligence in combat. *IMA Journal of Management Mathematics*, 30(2), 149-164.

[7] Dang, Q. A. , & Hoang, M. T. (2019). Nonstandard finite difference schemes for a general predator-prey system. *Journal of Computational Science*, 36, 101015.

[8] Das, S. , & Gupta, P. K. (2011). A mathematical model on fractional Lotka-Volterra equations. *Journal of Theoretical Biology*, 277(1), 1-6.

[9] Dehghan, M. , & Sabouri, M. (2013). A Legendre spectral element method on a large spatial domain to solve the predator-prey system modeling interacting populations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(3), 1028-1038.

[10] Deitchman, S. J. (1962). A Lanchester model of guerrilla warfare. *Operations Research*, 10(6), 818-827.

[11] Diethelm, K. , & Freed, A. D. (1998). The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Forschung und wissenschaftliches Rechnen*, 1999, 57-71.

- [12] Diethelm, K. , Ford, N. J. , & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1), 3-22.
- [13] Diethelm, K. , Ford, N. J. , & Freed, A. D. (2004). Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numerical algorithms*, 36(1), 31-52.
- [14] Doha, E. H. , Bhrawy, A. H. , & Ezz-Eldien, S. S. (2011). A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(5), 2364-2373.
- [15] Doha, E. H. , Bhrawy, A. H. , & Ezz-Eldien, S. S. (2012). A new Jacobi operational matrix: an application for solving fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 36(10), 4931-4943.
- [16] Du, M. , Wang, Z. , & Hu, H. (2013). Measuring memory with the order of fractional derivative. *Scientific reports*, 3(1), 1-3.
- [17] Galeone, L. , & Garrappa, R. (2008). Fractional adams–moulton methods. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(4), 1358-1367.
- [18] Garrappa, R. (2009). On some explicit Adams multistep methods for fractional differential equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 229(2), 392-399.
- [19] Ghanbari, B. , & Djilali, S. (2020). Mathematical analysis of a fractional-order predator-prey model with prey social behavior and infection developed in predator population. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109960.
- [20] Ghanbari, B. , Günerhan, H. , & Srivastava, H. M. (2020). An application of the Atangana-Baleanu fractional derivative in mathematical biology: A three-species predator-prey model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109910.
- [21] González, E. , & Villena, M. (2011). Spatial lanchester models. *European Journal of Operational Research*, 210(3), 706-715.
- [22] Hajimohammadi, Z. , Baharifard, F. , Ghodsi, A. , & Parand, K. (2021). Fractional Chebyshev deep neural network (FCDNN) for solving differential models. *Chaos, Solitons & Fractals*, 153, 111530.
- [23] Hartley III, D. S. , & Helmbold, R. L. (1995). Validating Lanchester's square law and other attrition models. *Naval Research Logistics (NRL)*, 42(4), 609-633.
- [24] Heymans, N. , & Podlubny, I. (2006). Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 45(5), 765-771.

- [25] Homer-Dixon, T. F. (1987). A common misapplication of the Lanchester square law: a research note. *International Security*, 12(1), 135-139.
- [26] Jafari, H. , Ganji, R. M. , Nkomo, N. S. , & Lv, Y. P. (2021). A numerical study of fractional order population dynamics model. *Results in Physics*, 27, 104456.
- [27] Kamimura, A. , Burani, G. F. , & França, H. M. (2011). The economic system seen as a living system: a Lotka-Volterra framework. *Emergence: Complexity and Organization*, 13(3), 80.
- [28] Keane, T. (2011). Combat modelling with partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 35(6), 2723-2735.
- [29] Kress, M. (2020). Lanchester models for irregular warfare. *Mathematics*, 8(5), 737.
- [30] Kress, M. , Caulkins, J. P. , Feichtinger, G. , Grass, D. , & Seidl, A. (2018). Lanchester model for three-way combat. *European Journal of Operational Research*, 264(1), 46-54.
- [31] Kumar, S. , Kumar, R. , Agarwal, R. P. , & Samet, B. (2020). A study of fractional Lotka-Volterra population model using Haar wavelet and Adams-Bashforth-Moulton methods. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(8), 5564-5578.
- [32] Kumar, A. , & Kumar, S. (2022). A study on eco-epidemiological model with fractional operators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 156, 111697.
- [33] Lanchester, F. W. (1956). Mathematics in warfare. *The world of mathematics*, 4(Part XX), 2138-2157.
- [34] Lepingwell, J. W. (1987). The laws of combat?: Lanchester reexamined. *International Security*, 12(1), 89-134.
- [35] Li, C. , & Tao, C. (2009). On the fractional Adams method. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(8), 1573-1588.
- [36] Marshall, J. (2009). Wargaming for Leaders: Strategic Decision-Making from the Battlefield to the Boardroom. *Financial Executive*, 25(1), 13-14.
- [37] Mason, R. C. (2018). Wargaming: its history and future. *The International Journal of Intelligence, Security, and Public Affairs*, 20(2), 77-101.
- [38] Miller, K. S. , & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- [39] Owolabi, K. M. (2021). Numerical approach to chaotic pattern formation in diffusive predator-prey system with Caputo fractional operator. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 37(1), 131-151.

- [40] Pakniyat, A. , Parand, K. , & Jani, M. (2021). Least squares support vector regression for differential equations on unbounded domains. *Chaos, Solitons & Fractals*, 151, 111232.
- [41] Pang, G. , Lu, L. , & Karniadakis, G. E. (2019). fPINNs: Fractional physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(4), A2603-A2626.
- [42] Perla, P. P. (1990). *The art of wargaming: A guide for professionals and hobbyists*. Naval Institute Press.
- [43] Pitolli, F. (2018). A fractional B-spline collocation method for the numerical solution of fractional predator-prey models. *Fractal and Fractional*, 2(1), 13.
- [44] Protopopescu, V. , Santoro, R. T. , & Dockery, J. (1989). Combat modeling with partial differential equations. *European Journal of Operational Research*, 38(2), 178-183.
- [45] Renganathan, K. , Ananthaswamy, V. , & Narmatha, S. (2021). Mathematical analysis of prey predator system with immigrant prey using a new approach to Homotopy perturbation method. *Materials Today: Proceedings*, 37, 1183-1189.
- [46] Ross, B. (1975). A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. *Fractional calculus and its applications*, 1-36.
- [47] Saadatmandi, A. , & Dehghan, M. (2010). A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 59(3), 1326-1336.
- [48] Spradlin, C. , & Spradlin, G. (2007). Lanchester's equations in three dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, 53(7), 999-1011.
- [49] Tarasov, V. E. (2009). Differential equations with fractional derivative and universal map with memory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(46), 465102.
- [50] Taylor, J. G. (1983). Lanchester models of warfare, military applications section. *Operations Research Society of America, Baltimore, Md*.
- [51] Taylor, J. G. , & Brown, G. G. (1976). Canonical methods in the solution of variable-coefficient Lanchester-type equations of modern warfare. *Operations research*, 24(1), 44-69.
- [52] Teodoro, G. S. , Machado, J. T. , & De Oliveira, E. C. (2019). A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388, 195-208.

[53] Turnitsa, C. , Blais, C. , & Tolk, A. (Eds.). (2021). *Simulation and Wargaming*. Wiley.

[54] Tyutyunov, Y. V. , & Titova, L. I. (2020). From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolving trophic functions. *Biology Bulletin Reviews*, 10(3), 167-185.

[55] Zabidi, N. A. , Abdul Majid, Z. , Kiliçman, A. , & Rabiei, F. (2020). Numerical Solutions of Fractional Differential Equations by Using Fractional Explicit Adams Method. *Mathematics*, 8(10), 1675.