دوفصلنامه بازی جنگ، سال پنجم، شماره ۱۰، بهار و تابستان ۱۴۰۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۱

از صفحه ۷ تا صفحه۲۴

مدل‌های تعقیب و گریز در طراحی بازی جنگ

جواد محمد کریمی*[۱]

نادر بیرانوند[۲]

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

یکی از ابزارهای بازی جنگ در تحلیل راهبردها نظریه بازی است. در این مقاله، نقش بازی‌های دیفرانسیلی و به ویژه بازی‌های تعقیب و گریز در طراحی شبیه‌سازهای بازی جنگ هوایی مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین در قالب چندین مدل راهبردهای خاص در بازی تعقیب و گریز در یک محیط بسته و کران‌دار N مورد معرفی قرار می‌گیرند. سپس از راهبرد ارائه شده در مدل‌ها به طراحی روش حل برای یک بازی جنگ در قالب زبان بازی شطرنج می‌پردازیم. این بازی‌ها شامل دو تعقیب کننده و یک تعقیب‌شونده هستند. بازی باید در این محیط انجام شود.. پیگرد به دو صورت کامل می‌شود. صورت اول: اگر فاصله مکانی تعقیب‌کننده‌ها از تعقیب‌شونده صفر شود صورت دوم: اگر فرض کنیم فاصله‌ای خاص از قبل داده شده باشد و فاصله مکانی تعقیب‌کننده‌ها از تعقیب‌شونده به این فاصله از هم داده شده برسد دو تعقیب‌کننده را جنگنده هوایی مدافع و تعقیب‌شونده را هواپیمای مهاجم در نظر می‌گیریم. در یک بازی جنگ در قالب زبان بازی شطرنج راهبرد پیروزی قطعی تعقیب‌کننده‌ها را بیان می‌کنیم و شرط کافی برای پیروزشدن را بدست می‌آوریم. همچنین راهبردی را بیان می‌کنیم که هیچ وقت تعقیب‌شونده دستگیر نخواهدشد و شرط کافی را برای این موضوع نیز بدست می‌آوریم. همچنین با بیان راهبردی دیگر و بدست آوردن شرط کافی نشان می‌دهیم با اضافه‌کردن یک تعقیب‌کننده دیگر، تعقیب‌کننده‌ها در بازی پیروز می‌شوند.

واژه‌های کلیدی:

تعقیب و گریز - شطرنج - راهبرد.

---

[۱] پژوهشگر، گروه مطالعات علوم و فناوری، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، تهران، ایران.

[۲] عضو هیئت علمی دانشگاه امام علی (ع) گروه ریاضیات دانشکده علوم، تهران، ایران.

* نویسنده مسئول: Email: javad.mohammadkarimi1369@gmail.com

مقدمه

بازی جنگ یک روش تمرین مسائل نظامی با هزینه پایین است. هدف از بازی جنگ آموزشی، آموزش نحوه تصمیم‌سازی و تصمیم گیری فرماندهان نظامی در جنگ‌های احتمالی آینده یا تحلیل جنگ‌های گذشته است. در بازی‌های جنگ مدرن از ابزارهای مختلفی جهت مدل‌سازی و شبیه‌سازی صحنه نبرد استفاده می‌شود که یکی از این ابزارها نظریه بازی است. با استفاده از نظریه بازی می‌توان به تحلیل راه‌کارهای ممکن و احتمالی خودی و دشمن پرداخت و راه‌کار بهینه را مشخص کرد. فاروغی [۱] به طور مشروح و تحقیقی به کاربرد بازی دیفرانسیلی در موشک‌ها و سیستم‌های هدایت خودکار پرداخته است. بیرانوند و همکاران در زمینه کاربرد نظریه بازی در حوزه دفاع پژوهشی انجام داده‌اند[۲]. در این مقاله به تحلیل راه‌کارهای فرماندهان در نبردهای مختلف براساس نظریه بازی‌ها پرداخته شده است.

معنای یک بازی ریاضی چیست؟ یک بازی ریاضی شامل بازیکنان، راهبردها و توضیح در مورد پیروز شدن در بازی است. بازی دیفرانسیلی از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کند. دلیل نام‌گذاری نیز استفاده از همین نوع معادلات است. بازی دیفرانسیلی انواع مختلفی دارد که مرسوم‌ترین آن بازی تعقیب و گریز است. در بسیاری از کتاب‌ها بازی دیفرانسیلی، موضوع تعقیب وگریز به صورت اصولی مورد مطالعه قرار گرفته است[۳-۵]. به عنوان مثال هاجک[۳] روش‌های اساسی را در بازی‌های دیفرانسیلی تعقیب و گریز برای پیروز شدن مورد بررسی قرار داده است. مثال‌های مفید و متعدد، مفاهیم پایه و پیشرفته از جمله دستگیری، استراتژی و تئوری جبری را مورد شفاف‌سازی قرار داده‌اند. فصل‌های آغازین کتاب بر مثال‌ها، کاربردها و مفاهیم اساسی تمرکز دارند و به بازی‌های خطی و غیرخطی می‌پردازند.

پتروسیان[۴] نظریه کامل بازی‌های دیفرانسیلی تعقیب و گریز را با اطلاعات کامل و جزئی ارائه داده است. چندین مثال ملموس از بازی تعقیب وگریز شامل بازی‌های خط زندگی، بازی‌های تعقیب ساده مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین اصول جدید بهینه‌سازی سازگار با زمان در نظریه بازی‌های دیفرانسیلی شامل تعداد بازیکنان متناهی معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ناهین [۵] مجموعه‌ای از راه‌حل‌ها برای انواع مسائل تعقیب و گریز کلاسیک و مدرن‌ارائه داده است.

ایساک[۶] یکی از آثار مهم و اساسی در نظریه بازی‌ها است، این کتاب نگاهی اصیل و کارشناسانه به راه حل‌های تعارض دارد. نویسنده با تکیه بر نظریه بازی، محاسبات تغییرات و تئوری کنترل، مجموعه‌ای کامل از مشکلات مربوط به موقعیت‌های نظامی، تاکتیک‌های تعقیب و گریز، مسابقات ورزشی و بسیاری موارد دیگر را حل کرده‌است. مثال‌های واضح، دقیق و محاسبات متعدد از ویژگی‌های این کتاب است. چن و همکاران [۷] به حل و بررسی راهبرد فرار بهینه برای هواپیماهای با سرعت بالا پرداخته‌اند. ابراگیموف و همکاران [۸] فرار از تعدادی تعقیب‌کننده را در بازی دیفرانسیلی با محدودیت‌های انتگرالی مورد مطالعه قرار دادند. اخیرا سلیمی و همکاران [۹] بازی دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار دادند که در آن تعدادی تعقیب‌کننده به دنبال دستگیری یک تعقیب‌شونده می‌باشند. در این بازی تمام

بازیکنان باید حرکت‌های ساده را برای بازی انتخاب کنند. بعضی از تعقیب‌کننده‌ها دارای محدودیت انتگرالی و بعضی دیگر دارای محدودیت هندسی هستند. تعقیب‌شونده در این بازی دارای محدودیت هندسی است. قسمت قابل توجهی از تحقیقات بازی‌های دیفرانسیلی دو نفره می‌باشند. یکی از کارهای اساسی در این زمینه توسط بلاکوییر و همکاران [۱۰] انجام شده است. نویسندگان جنبه‌های نظری و عملی روش‌های محاسباتی را مورد مطالعه قرار دادند. در قسمت دیگری از تحقیقات در زمینه بازی تعقیب وگریز، تانگ و همکاران [۱۱] به بررسی مشکل بازی رهگیری فضاپیما با اطلاعات ناقص پرداخته‌اند. بر اساس بازی‌های دیفرانسیلی، راهبردهای تعویض برای حل این مشکل ارائه شده است. در فرایند تعقیب، هدف می‌تواند چندین راهبرد را برای فرار از تعقیب‌کننده انتخاب و در حین فرار، راهبردها را عوض کند. این موضوع منجر به فرمول‌بندی راهبردهای تعویض برای تعقیب‌کننده شده است. یان و همکاران [۱۲] بازی دیفرانسیلی رسیدن-اجتناب را با دو تعقیب‌شونده و یک تعقیب‌کننده مورد بررسی قرار داده‌اند. منطقه مورد نظر با یک خط مستقیم به یک منطقه بازی و یک منطقه هدف تقسیم شده است. دو تعقیب‌کننده با شروع از منطقه بازی، هدفشان رسیدن به منطقه هدف است. این منطقه توسط تعقیب‌کننده سریعتر که سعی در دستگیری تعقیب‌شونده‌ها دارد، محافظت می‌شود.

ابراگیموف و همکاران [۱۳] یک بازی دیفرانسیلی تعقیب خطی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. این بازی توسط یک سیستم بی‌نهایت از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در فضای هیلبرت (مثلا فضای دو بعدی) توصیف شده‌است. تابع‌های کنترلی دارای محدودیت دیفرانسیلی هستند. تعقیب‌کننده‌ها تلاش می‌کنند تا وضعیت سیستم را از حالت اولیه معین در یک مدت زمان محدودی به مبدا برسانند و این درحالی است که تعقیب‌شونده خلاف این را انجام می‌دهد. نویسندگان یک فرمول برای پیگرد تضمینی، یک استراتژی برای تعقیب‌کننده‌ها و یک فرمول برای زمان فراری تضمین‌شده بدست آورده‌اند. سلیمی [۱۴] یک بازی دیفرانسیل تعقیب و گریز در فضای هیلبرت(مثلا فضای دو بعدی) با سیستم مخلوطی از دینامیک‌ها را مورد بررسی قرار داده است. بازی از یک تعقیب‌کننده غیر لخت (غیر اینرسی) و یک تعقیب‌شونده لخت (اینرسی) تشکیل شده که در آن تابع‌های کنترلی بازیکنان دارای محدودیت انتگرالی هستند. مدت زمان بازی ثابت است و دامنه‌های در دسترس مشخص شده‌اند. بر این اساس یک راهبرد پیروزی برای تعقیب کننده‌ها بدست آمده است.

شریفی و همکاران [۱۵] یک بازی دیفرانسیل تعقیب و گریز شامل تعداد شمارا تعقیب‌کننده و یک تعقیب‌شونده را مورد بررسی قرار دادند. تابع‌های کنترل بازیکنان دارای محدودیت انتگرالی هستند و زمان بازی ثابت است. نویسندگان در این مقاله یک راهبرد بهینه برای تعقیب‌کننده‌ها بدست آورده‌اند. کی و همکاران [۱۶] مدل دینامیک‌های جزئی سیستم تعقیب و گریز موشک را ارائه داده‌اند. آنها همچنین بر اساس نظریه بازی دیفرانسیلی یک مدل بازی دیفرانسیلی از جنگ موشکی به دست آورده‌اند. پونتانی و همکارش [۱۷] مسئله تعقیب کلاهک موشک بالستیک توسط یک موشک دفاعی را

به عنوان بازی دیفرانسیلی فرمول‌بندی کردند. الطاهر و همکاران [۱۸] مسئله تعقیب موشک را مورد بررسی قرار دادند. این مسئله به عنوان بازی دیفرانسیلی فرمول‌بندی شده و توسط تکنیک‌های کنترل بهینه حل شده است. پرلمان و همکاران [۱۹] راهبردهای تعقیب و گریز برای بازی شامل دو بازیکن را بدست آورده‌اند. در این مقاله، موضوع حائز اهمیت حفظ جنگنده هدف از موشک هدف یاب است. مسئله توسط بازی دیفرانسیلی چهارگانه خطی تحلیل و بررسی شده است.

بازی شیر و مرد یک بازی مشهوری است[۲۰]. شیر می‌خواهد مرد را در یک محیط مشخص شکار کند. بنابراین شیر به راهبردی نیاز دارد تا شکار مرد محقق شود. در نتیجه ما می‌توانیم به عنوان یک توضیح ریاضی این بازی را تعقیب و گریز تعبیر کنیم. دستگیری در مفهوم ریاضی به این معناست که در زمان محدود داده شده، مثلا t، فاصله بین تعقیب‌کننده‌ها و تعقیب‌شونده به یک فاصله‌ای از قبل تعیین شده برسد. این فاصله می‌تواند صفر فرض شود. تعداد قابل توجهی از مقاله‌ها به بازی دیفرانسیلی پرداخته‌اند که در آن محدودیت روی تابع‌های کنترلی از نوع انتگرالی است. در این مقالات نویسندگان شرایطی بدست آوردند که پیگرد کامل می‌شود. محدوده بازی در این مقالات مجموعه‌ای بسته، کراندار، و محدب می‌باشد و بازیکنان در تمام مدت بازی باید در این مجموعه باشند [۲۱-۲۴].

نوری و همکاران [۲۵] به بیان توصیفی شکل‌های موجود در این مقاله حاضر پرداخته‌اند. نویسندگان در این پژوهش، با اخذ این شکل‌ها از مقاله ذکر شده، مدل‌بندی ریاضی و بیان نحوه عملکرد بازیکنان را با زبان ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهند و در این راستا با ارائه چند مدل بازی تعقیب و گریز به نقش این بازی‌ها در طراحی شبیه سازهای بازی جنگ می‌پردازند. همچنین این مقاله با ارائه روشی اصولی برای این شکل‌ها در ساختار بازی تعقیب و گریز، صورت‌بندی قضایای مرتبط همراه با اثبات ریاضی و تعریف تابع هزینه مورد نیاز اینگونه بازی‌ها، راهبردهای مختلفی را مورد بررسی قرار می‌دهد.

این مقاله با استفاده از بازی شطرنج مدل‌سازی حالت‌هایی خاص از بازی جنگ را مورد بررسی قرار می‌دهد. روشی ارائه می‌کنیم که فقط با راهبرد ذکر شده، تعقیب‌کننده‌ها در بازی پیروز می‌شوند. مثالی بیان می‌کنیم که با وجود دو تعقیب‌کننده و یک تعقیب‌شونده، پیروز شدن تعقیب‌شونده حتمی است. این موضوع بیان‌گر این است که اگر تعداد تعقیب‌کننده‌ها از تعقیب‌شونده‌ها بیشتر باشد، که در اینجا حالت مورد نظر ما دو تعقیب‌کننده و یک تعقیب‌شونده است، لزوما دلیلی بر پیروزی حتمی تعقیب‌کننده‌ها نداریم. در ادامه با تشریح ساختار بازی تعقیب و گریز به بررسی چهار مدل می‌پردازیم. در تمامی مدل‌ها هدف دفاع کردن از خط L است. در مدل اول، راهبرد تعقیب شونده این است که فقط به راست یا فقط به چپ حرکت می‌کند و در مقابل راهبرد تعقیب‌کننده قراردادن موقعیت مکانی خود در تصویر عمودی تعقیب‌شونده بر روی خط L است. در قضیه ۱ ثابت می‌کنیم با راهبردهای انتخاب شده پیگرد کامل می‌شود و تعقیب‌کننده‌ها در بازی پیروز می‌شوند.

در مدل دوم، راهبرد تعقیب شونده این است که به موازات خط L حرکت‌های رفت و برگشتی داشته باشند. در قضیه ۲ نشان می‌دهیم که تعقیب‌شونده هرگز دستگیر نمی‌شود. در مدل سوم، با اضافه

کردن یک تعقیب‌کننده دیگر به مدل دوم، راهبرد تعقیب‌کننده‌ها محدودکردن فضای مانور تعقیب‌شونده است. در قضیه ۳ نشان می‌دهیم که با راهبردهای انتخاب شده، تعقیب‌کننده‌ها در بازی پیروز می‌شوند و پیگرد کامل می‌شود. همچنین به بیان مثالی می‌پردازیم که در صورت انتخاب نشدن راهبردهای ذکر شده در مدل سوم، لزوما دلیلی بر پیروزی با اضافه کردن یک تعقیب‌کننده دیگر نداریم. بلکه بر عکس، تعقیب‌شونده از دست‌گیری خود جلوگیری می‌کند و پیروز می‌شود. در مدل چهارم، راهبردی برای بازیکنان شطرنج مورد بررسی قرار می‌گیرد که پیروزی تعقیب‌کننده‌ها قطعی خواهدبود. در ادامه به بیان تعاریف و ساختار بازی مورد نظر می‌پردازیم.

تعاریف، مفاهیم پایه و ساختار بازی تعقیب و گریز در صفحه $\square^2$ به منظور طراحی راهبرد بازی جنگ در قالب بازی شطرنج

ابتدا تعریف متر را بیان می‌کنیم و سپس تعریف بزرگترین کران پایین آورده می‌شود. هدف از بیان تعریف متر، ارائه تعریف تابع هزینه برای بازی‌های تعقیب و گریز در مقاله حاضر است. با توجه به اینکه متر مفهوم فاصله را در بر دارد و تابع هزینه هم بر اساس کمینه کردن یا بیشینه کردن فاصله دو بازیکن متقابل تعریف می‌شود، به مفهوم بزرگترین کران پایین نیز احتیاج داریم.

تعریف۱. [۲۶] فرض کنیم X یک مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbf{R}$ را یک متریک روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱- به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) \geq 0$.

۲- به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = 0$ فقط و فقط وقتی که $x = y$.

۳-به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = d(y, x)$.

۴- به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

در صورتی که d یک متریک روی X باشد، (X, d) را یک فضای متریک می‌نامیم و می‌گوییم فضای X به متر d مجهز شده است.

مثال. [۲۶] با شناختی که از خواص تابع قدرمطلق روی اعداد حقیقی داریم، می‌توانیم بگوییم که $\mathbf{R}$ با متر زیر یک فضای متریک است. برای $x, y \in X$ تعریف کنید $d(x, y) = |x - y|$.

مثال. [۲۶] روی $\mathbf{R}^n$ متر d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$d(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$، که در آن $x = (x_1, ..., x_n)$ و $y = (y_1, ..., y_n)$ عضو $\mathbf{R}^n$ هستند.

در تعریف بعد مفهوم بزرگترین کران پایین ارائه می‌شود.

تعریف۲. [۲۷] فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی و از پایین کراندار باشد. b را بزرگترین کران پایین (اینفیمم) می‌نامیم و با $b = \inf A$ نمایش می‌دهیم در صورتی که

الف) b یک کران پایین A باشد.

ب) bبزرگترین کران پایین A باشد.

تعریف۳. [۲۶] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\varnothing \neq A \subseteq X$. برای هر $x \in X$ فاصله x تا A با نماد $d(x,A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$.d(x,A)=\inf\{d(x,a), a\in A\}$

در این مقاله کامل شدن پیگرد بر اساس فاصله مکانی تعقیب‌کننده‌ها و تعقیب‌شونده تعریف شده است(تعریف ۴). بنابراین طبیعی است تابع هزینه به صورتی که در ادامه خواهد آمد بر اساس بزرگترین کران پایین بوسیله تعریف ۱ و تعریف ۳ به دست می‌آید.

تعریف۴. ما به دو حالت، پیگرد را در زمان بازی θ کامل اعلام می‌کنیم. حالت اول، دقیقاً فاصله تعقیب‌کننده‌ها از تعقیب‌شونده صفر شود. حالت دوم، فاصله تعقیب‌کننده‌ها و تعقیب‌شونده از هم یک فاصله از قبل تعیین شده باشد.

تعریف۵. [۲۸] فرض کنیم مجموعه $A\subseteq \mathbb{R}^2$ و زیر مجموعه آن B داده شده‌اند. یک تصویر $\pi: A\to B$ یک تابع است به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱- اگر $x\in B$ آنگاه $.\pi(x)=x$

۲- $d(\pi(x),\pi(y))\le d(x,y)$

اکنون به بیان ساختار بازی تعقیب و گریز در صفحه دو بعدی می‌پردازیم.

الف- هر بازی شامل بازیکنان است. این بازیکنان شامل تعقیب کننده‌ها و تعقیب‌شونده‌ها هستند. در این مقاله ما دو مهره تعقیب‌کننده و یک مهره تعقیب‌شونده داریم. مهره‌های p_1 و p_2 تعقیب‌کننده‌ها و مهره e تعقیب‌شونده است. موقعیت مکانی مهره‌های p_1 و p_2 را به ترتیب با x_1 و x_2 نمایش می‌دهیم. موقعیت مکانی مهره e هم با y نمایش داده می‌شود.

ب- هر بازی باید راهبرد داشته باشد. U_1 و U_2 مجموعه راهبردهای به ترتیب p_1 و p_2 هستند. به‌طورکلی راهبرد تعقیب‌کننده‌ها را با U و راهبرد e را با V نمایش می‌دهیم.

ج- هر بازی باید شامل تابع هزینه باشد. بازیکنان به‌منظور دست‌یابی به اهداف خود به دنبال بیشینه کردن یا کمینه کردن این تابع هستند. فرض کنیم زمان بازی θ باشد. در این بازی تابع هزینه مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\gamma(\theta)=\inf_{i=1,2} d(x_i(\theta),y(\theta))$$

هدف تعقیب‌کننده‌ها کمینه کردن تابع هزینه و هدف تعقیب‌شونده بیشینه کردن این تابع است. در این مقاله در بعضی حالت‌ها کمینه کردن تابع هزینه فوق به این معناست که در یک زمان خاص موقعیت مکانی تعقیب‌شونده و تعقیب‌کننده برابر شود. به عبارت دیگر برای زمان خاص θ داشته باشیم $x(\theta)=y(\theta)$. بنابراین در این حالت $\gamma(\theta)=0$ است. با توجه به اینکه فاصله همیشه عددی

نامنفی است، در این حالت کمترین حالت ممکن اتفاق افتاده است. یعنی فاصله دو بازیکن از هم صفر است.

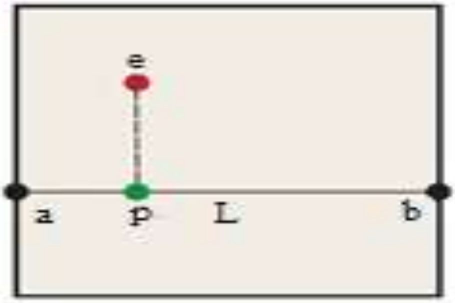
د- هر بازی باید در یک محیط انجام بشود. در این مقاله تمام بازی‌ها در مجموعه بسته و کران‌دار N صورت می‌گیرند.

خوانندگان برای مطالعه بیشتر در مورد فضای متریک می‌توانند به کتاب [۲۶] مراجعه کنند. در ادامه به تشریح دو فاز اصلی برای تعقیب‌کننده‌ها می‌پردازیم.

در مدل اول و دوم برای دستگیری مهاجم، راهبرد تعقیب، دو فاز اصلی دارد. اولین فاز این است که فراری را از قسمتی از منطقه بازی که در آن قرار گرفته است مجبور به ترک کنیم و سپس این منطقه را مورد محافظت قرار دهیم. در مدل اول فقط به فاز اول پرداخته می‌شود. فاز دوم گسترش منطقه حفاظت شده است. گسترش به این معناست که محدودهٔ مانور فراری محدود می‌شود. این فاز در مدل دوم بررسی می‌شود. اکنون به مدل اول می‌پردازیم. این مدل فقط شامل یک تعقیب‌کننده و یک تعقیب‌شونده است.

مدل اول

فرض کنیم بین دو نقطه a و b خطی کشیده شده است. در اینصورت نام این خط را L می‌گذاریم (شکل **۱**). هدف دفاع کردن از خط L است. برای دستگیری مهاجم، راهبرد تعقیب فاز اول است. ایده برای دفاع از خط L این است که مدافع (تعقیب‌کننده) را در موقعیتی بین دو نقطه رو خط L قرار دهیم تا از عبور مهاجم (تعقیب‌شونده) از خط L جلوگیری کند. در این مثال بازیکنان در تمام زمان بازی اطلاعات کامل از منطقه بازی و موقعیت مکانی طرف مقابل خود دارند. تعقیب‌کننده از خط L با قراردادن موقعیت خود درست در جایی که تصویر عمودی فراری رو خط L قرار می‌گیرد، دفاع می‌کند. تصویر عمودی دارای این ویژگی است که فاصله‌اش تا فراری از فاصله تمامی نقاط روی خط L تا خود فراری کمتر است. اگر تعقیب‌شونده (فراری) بخواهد از خط L عبور کند، تعقیب‌کننده (که تصویر عمودی از فراری است) فراری را در طول حرکت بعدی دستگیر می‌کند. در واقع حرکت به سمت فقط راست یا فقط به سمت چپ مجاز است. به‌عنوان مثال فرض کنیم فراری به سمت راست حرکت کرده است در این صورت تعقیب‌کننده به سمت راست تا جایی که در تصویر عمودی مهاجم قرار بگیرد حرکت می‌کند و اگر فراری بخواهد از خط L عبور کند، دستگیر خواهد شد.



شکل (۱) تعقیب کننده می‌تواند از عبور فراری از خط L با قراردادن موقعیت خودش در تصویر عمودی فراری جلوگیری کند.

راهبرد اول: با توجه به مدل بالا، V شامل حرکت فقط به چپ یا فقط به راست و سپس حرکت عمودی برای عبور از خط L است. برای دستگیری فراری، U شامل قراردادن موقعیت مکانی تعقیب‌کننده در تصویر عمودی فراری است.

در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که کاربرد راهبرد بالا در بازی شطرنج به پیروزی حتمی تعقیب‌کننده می‌انجامد. قابل ذکر است که ما در شکل برای گویا بودن بهتر، موقعیت مکانی e را به‌جای y با خود نماد e نمایش می‌دهیم. ولی در اثبات‌ها از $y(t)$ و $x(t)$ برای نشان دادن موقعیت مکانی به ترتیب تعقیب‌شونده و تعقیب‌کننده در زمان t استفاده می‌کنیم.

قضیه۱. فرض کنیم در صفحه بازی شطرنج فقط دو مهره وجود دارد. مهره p را به عنوان تعقیب‌کننده و مهره را به عنوان e تعقیب‌شونده در نظر می‌گیریم. در اینصورت با به‌کار بردن راهبرد اول، پیروزی تعقیب‌کننده حتمی است و تعقیب‌شونده دستگیر خواهد شد. به عبارت دیگر پیگرد کامل می‌شود.

اثبات: فرض کنیم در زمان t_1 مهره e در موقعیت مکانی $y(t_1)$ قرار دارد. همچنین فرض کنیم محدوده مانور مهره e زیر مجموعه B از فضای مجاز بازی، یعنی N، باشد. طبق مدل اول مهره p اطلاعات کامل از منطقه بازی و موقعیت مکانی مهره e دارد. در اینصورت در زمان t_2 مهره e فقط به راست یا فقط به چپ حرکت می‌کند و در موقعیت مکانی $y(t_2)$ قرار می‌گیرد و در حرکت بعدی خود می‌خواهد از خط L عبور کند. راهبرد مهره p این است که خودش را در تصویر عمودی مهره e قرار دهد. در نتیجه با توجه به اینکه موقعیت مکانی مهره p در زمان t_2 با $x(t_2)$ نشان داده می‌شود داریم $\pi(y(t_2)) = x(t_2)$. چون $B \in y(t_2)$ پس $\pi(y(t_2)) = y(t_2)$ یعنی در زمان t_2، $x(t_2) = y(t_2)$. پس با توجه به نحوه تعریف تابع هزینه و اینکه هدف تعقیب‌کننده کمینه کردن این تابع است، چون موقعیت مکانی تعقیب‌کننده و تعقیب‌شونده بر هم منطبق شده است، داریم $\gamma(t_2) = \inf d(x(t_2), y(t_2)) = 0$. بنابراین پیگرد کامل می‌شود و فراری دستگیر می‌شود.

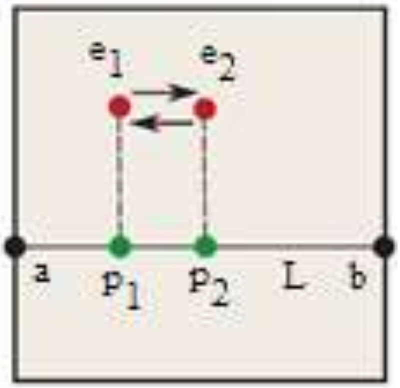
در مدل بعدی نشان می‌دهیم اگر تعقیب‌شونده به‌موازات خط L به‌صورت رفت و برگشتی موقعیت مکانی خودش را تغییر دهد، آنگاه هیچگاه توسط تعقیب‌کننده دستگیری رخ نمی‌دهد. دستگیری به

این معناست که موقعیت مکانی تعقیب‌شونده و تعقیب‌کننده برابر است که در این حالت این برابری اتفاق نمی‌افتد و در تمام مدت زمان بازی تابع هزینه مقدار ثابتی را اخذ می‌کند.

مدل دوم

در این مثال با توجه به مثال قبلی فرض می‌کنیم مهاجم یک واحد به موازات خط L حرکت کند و موقعیت مکانی خود را از e_1 به e_2 تغییر دهد که فاصله e_1 تا e_2 به‌عنوان مثال ۱ m است (شکل ۲).

در این صورت تصویر عمودی مهاجم روی خط L که با p_1 و p_2 نشان داده می‌شوند نیز فاصله آنها m ۱ است. اکنون هزینه حرکتی تعقیب‌کننده فقط صرف این می‌شود که به‌صورت موازی دنبال فراری حرکت کند. حال اگر فراری بعد از یک تغییر مکانی به موازات خط L جهت حرکت خود را دقیقاً در جهت عکس حرکت قبلی انجام دهد، آنگاه تعقیب‌کننده مجبور می‌شود بین دو نقطه ثابت p_1 و p_2 حرکت کند. در نتیجه، تعقیب‌کننده از انجام دومین راهبرد که حرکت خط L به سمت مهاجم است تا محدوده مانور او را محدودتر کند، باز می‌ماند و فراری هرگز دستگیر نمی‌شود.



شکل (۲)چون e_1e_2 موازی خط L است ۱=|e_1e_2|، پس ۱=|p_1p_2|؛ بنابراین تعقیب‌کننده روی خط L بین دو نقطه p_1 و p_2 گیر افتاده است.

راهبرد دوم: راهبرد تعقیب‌شونده V حرکت به چپ و سپس برگشتن همان مسیر در جهت عکس است. راهبرد تعقیب‌کننده U قرارگرفتن در تصویر عمودی تعقیب‌شونده است. در این مجموعه راهبرد از طرفین بازی، فراری هیچ‌وقت دستگیر نمی‌شود.

در قضیه بعد ثابت می‌کنیم که اگر راهبردهای تعقیب‌شونده و تعقیب‌کننده از راهبرد دوم انتخاب شوند، آنگاه فراری هیچ‌وقت دستگیر نمی‌شود. این بدین دلیل است که تعقیب‌کننده فقط می‌تواند(در این حالت) از خط مذکور دفاع کند، و از محدود کردن فضای مانور تعقیب‌شونده باز می‌ماند.

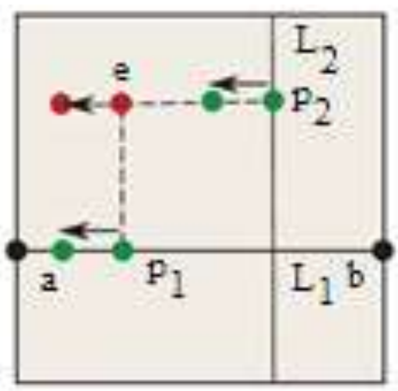
قضیه ۲. فرض کنیم در صفحه بازی شطرنج فقط دو مهره وجود دارد. مهره p را به عنوان تعقیب‌کننده و مهره e را به عنوان تعقیب‌شونده در نظر می‌گیریم. در اینصورت با به‌کار بردن راهبرد دوم، مهره e هیچ‌وقت دستگیر نمی‌شود.

اثبات: مهره e از $y(t_1)$ به $y(t_2)$ در جهت راست یا چپ به موازات خط L تغییر وضعیت می‌دهد. فرض کنیم به سمت راست تغییر وضعیت دهد. دراین صورت طبق راهبرد مهره p از $x(t_1)$ به $x(t_2)$ تغییر مکان می‌دهد به گونه‌ای که در هر مرحله تصویر عمودی موقعیت مکانی مهره e بر موقعیت مکانی مهره p منطبق شود. حال فرض کنیم مهره e به موازات خط L در جهت عکس حرکت قبلی به $y(t_3)$ تغییر مکان دهد. در این صورت مهره p نیز مجبور است برای منطبق شدن بر تصویر عمودی مهره e به $x(t_3)$ تغییر مکان دهد. اکنون وقت مهره p فقط صرف حرکت رفت و برگشتی برای تطابق بر تصویر عمودی مهره e می‌شود. با این کار مهره p قادر به محدود کردن محدوده مانور مهره e نخواهد بود و با توجه به اینکه هدف تعقیب‌کننده کمینه کردن تابع هزینه است، و در این حالت در تمام زمان بازی تابع هزینه مقدار ثابتی را اخذ می‌کند، دستگیری اتفاق نمی‌افتد.

در ادامه روشی برای دستگیری تعقیب‌شونده که در مدل بالا قادر به انجام آن نبودیم پیشنهاد می‌شود. تاکید می‌کنیم، که فقط در صورت انجام راهبرد در این قسمت، تعقیب‌کننده‌ها پیروز خواهند شد. بعد از قضیه سوم مثالی ارائه می‌دهیم که در صورت اضافه کردن یک تعقیب‌کننده، بدون عمل به راهبرد سوم، تعقیب‌شونده پیروز می‌شود.

مدل سوم

یک مهره تعقیب‌کننده دیگر اضافه می‌کنیم تا از جهتی دیگر دفاع کند (شکل ۳). فرض کنید ما دو مهره تعقیب‌کننده داریم که هر کدام از آنها از یک خط با قراردادن موقعیت خود در تصویر فراری دفاع می‌کنند. اولین مهره تعقیب‌کننده p_1 از خط افقی L_1 محافظت می‌کند و دومین تعقیب‌کننده p_2 از خط عمودی L_2 دفاع می‌کند. این روش تعقیب‌شونده را در یک ربع مربع گیر خواهد انداخت. اگر فراری افقی حرکت کند، تعقیب‌کننده p_1 به دنبالش افقی حرکت می‌کند تا تصویر عمودی فراری بر مکان p_1 منطبق شود و در همین حین تعقیب‌کننده p_2 خط دفاعی را یک واحد به سمت فراری جلو می‌برد. به‌صورت مشابه اگر فراری عمودی حرکت کند، p_2 به حرکتش ادامه می‌دهد و این در حالی است که p_1 خط دفاعی خودش را جلو می‌برد.



شکل(۳) دو تعقیب کننده با قرار گرفتن در تصویر تعقیب شونده از خطوط L_1 و L_2 محافظت می‌کنند. یکی از آنها می‌تواند بعد از هر حرکت بازی را پیش ببرد.

راهبرد سوم: راهبرد مهره e حرکت‌های چپ و راستی به‌موازات خط L_1 و همچنین عمودی به‌موازات خط L_2 است. راهبرد مهره‌های تعقیب‌کننده U همزمان با قراردادن موقعیت مکانی در تصویر عمودی مهره e و محدودکردن فضای مانور مهره e به دنبال دستگیری او هستند.

همان طور که در مدل دوم دیدیم، راهبرد انتخاب شده توسط تعقیب‌شونده باعث شد که تعقیب‌شونده هیچ‌وقت دستگیر نشود. ما در قضیه بعد ثابت می‌کنیم که با انتخاب راهبرد سوم، پیروزی تعقیب‌کننده‌ها حتمی است. در واقع این‌کار با اضافه کردن یک تعقیب‌کننده دیگر و محدود کردن فضای مانور تعقیب‌شونده انجام می‌شود.

قضیه۳. فرض کنیم در صفحه بازی شطرنج فقط سه مهره وجود دارد. بازی شامل دو مهره تعقیب‌کننده p_1 و p_2 و مهره e تعقیب‌شونده است. در اینصورت در راهبرد سوم، مهره e دستگیر می‌شود. به عبارت دیگر پیگرد کامل می‌شود.

اثبات: اگر مهره e به موازات خط L_1 به سمت چپ حرکت کند و موقعیت مکانی‌اش در زمان t، $y(t)$ باشد، آنگاه طبق راهبرد، مهره p_1 نیز به سمت چپ حرکت می‌کند تا در زمان t، داشته باشیم $\pi(y(t_1)) = x_1(t_1)$. حال اگر مهره فراری دوباره در جهت عکس حرکت قبلی تغییر مکان دهد، آنگاه مهره p_1 نیز در تصویر عمودی مهره فراری قرار می‌گیرد. در این زمان مهره p_2 خط L_2 را به سمت مهره e حرکت می‌دهد تا فضای مانور مهره فراری محدود شود. چون فضای بازی محدود است و طبق راهبردهای اتخاذ شده برای مهره‌های تعقیب‌کننده، پس از مدت زمان محدود پیگرد کامل می‌شود. یعنی زمان tای وجود دارد که $x_1(t) = y(t)$ یا $x_2(t) = y(t)$. پس با توجه به نحوه تعریف تابع هزینه و اینکه هدف تعقیب‌کننده کمینه کردن این تابع است و چون موقعیت مکانی تعقیب‌کننده و تعقیب‌شونده بر هم منطبق شده است، داریم $\gamma(t) = \inf d(x_i(t), y(t)) = 0$. که در آن $i = 1, 2$ است. بنابراین پیگرد کامل می‌شود و فراری دست گیر می‌شود.

در ادامه به بیان مثالی می‌پردازیم که در آن راهبردی به غیر از راهبرد ارئه شده در راهبرد سوم مورد استفاده قرار گرفته است و بازیکنان به گونه‌ای دیگر عمل می‌کنند. در این حالت نه تنها اضافه کردن یک تعقیب‌کننده به پیروزی تعقیب‌کننده‌ها نمی‌انجامد، بلکه در این حالت خاص تعقیب‌شونده پیروز می‌شود.

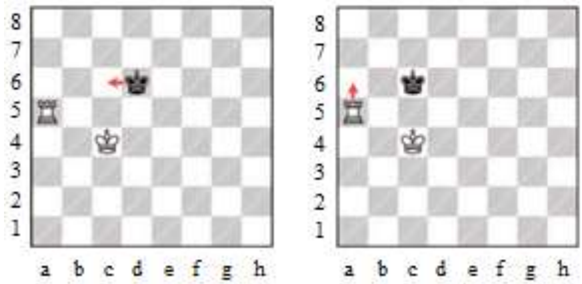
مثال. فرض کنید در مدل سوم تعقیب‌کننده p_1 مهره شاه و تعقیب کننده p_2 مهره اسب در بازی شطرنج باشند. همچنین فرض کنید تعقیب‌شونده مهره وزیر در بازی شطرنج باشد. فرض کنید موقعیتی فراهم شده است که مهره وزیر هم‌زمان به مهره شاه کیش می‌دهد و مهره اسب را نیز تهدید می‌کند. در این صورت مهره شاه باید خود را از آن موقعیت خارج کند. پس از آن مهره وزیر مهره اسب را از بازی خارج می‌کند. در این صورت مهره وزیر که نقش تعقیب شونده را دارد، هیچگاه دستگیر

نمی‌شود. در ادامه مدل‌سازی ریاضی موقعیتی خاص در بازی شطرنج مورد بررسی قرار گرفته است. سپس روش حل پیروزی تعقیب‌کننده‌ها برای این مدل در قالب راهبرد مهره‌های بازی شطرنج ارائه می‌شود. در این مدل‌سازی لازم نیست موقعیت مکانی تعقیب‌کننده‌ها و تعقیب‌شونده‌ها دقیقاً بر هم منطبق شوند. به عبارت دیگر لازم نیست فاصله تعقیب شونده از تعقیب کننده صفر شود. در این مدل‌سازی اگر تعقیب‌کننده‌ها در فاصله‌ای خاص از تعقیب‌کننده قرار بگیرند، دستگیری اتفاق می‌افتد.

مدل چهارم

این مدل شامل سه بازیکن است. یک شاه و یک رخ با رنگ سفید تعقیب‌کننده و شاه سیاه تعقیب‌شونده هستند. هدف از این مدل ارائه راهبردی است که شاه سیاه را با محدود کردن فضای مانور مات کنند. به عبارت دیگر برای مات نمودن مهره شاه سیاه، مهره رخ و شاه سفید به شرح زیر عمل می‌کنند. یک ردیف در یک‌زمان، مهره رخ سفید محدوده مانور در دسترس مهره شاه سیاه را کاهش می‌دهد. این امر با حمایت مهره شاه سفید که تصویر مهره شاه سیاه را بر سطری که توسط مهره رخ حفاظت شده است به دست می‌آید. به طور خاص، فرض کنید رخ سفید در ردیف iام و ستون یکم است که از ردیف iام محافظت می‌کند. مهره شاه سیاه در ردیف $i' > i$ و ستون jام است. همچنین مهره شاه سفید در ردیف $i-1$ام و ستون $j-1$ام قرار دارد. از این موقعیت، مهره شاه سفید، مهره شاه سیاه را دنبال می‌کند تا اینکه تعداد ستون‌های جداکننده مهره رخ سفید و مهره شاه سفید حداقل دو باشد (شکل ۴(الف)).

پس از دستیابی به این تعداد از فاصله ستونی، بازیکن سفید می‌تواند به شرح زیر پیشرفت کند. اگر مهره شاه سیاه دوباره به ستون $j-1$ام برگردد، آنگاه مهره رخ سفید می‌تواند به‌ردیف $i + 1$ام منتقل شود و مهره شاه سیاه را به سمت ردیف‌های بالاتر مجبور به حرکت کند (شکل ۴(ب)). دلیل این موضوع این است که مهره شاه سیاه نمی‌تواند به ردیف iام حرکت کند، زیرا خانه‌های در دسترس توسط مهره شاه سفید محافظت می‌شود. علاوه بر این، در بدترین حالت که $i'= i +1$، مهره شاه سیاه به دلیل فاصله دو ستونی بین مهره شاه سفید و مهره رخ سفید نمی‌تواند در سطر i'ام بماند اگر مهره شاه سیاه از مهره شاه سفید دور گردد، آنگاه مهره شاه سفید به دنبال‌کردن مهره شاه سیاه ادامه می‌دهد. سرانجام مهره شاه سیاه در یک سطر به دام می‌افتد و توسط مهره‌های سفید مات می‌گردد.



(الف) (ب)

شکل (۴)شرایط خاتمه بازی شطرنج مهره رخ و مهره شاه

راهبرد چهارم: در راهبرد مهره سفید رخ، تعقیب کننده‌ها نقش‌های مهره رخ و مهره شاه را دارا هستند. (زیرا فراری نمی‌تواند تعقیب‌کننده را تهدید کند). مشابه مهره رخ سفید، یکی از تعقیب‌کننده‌ها از ردیف افقی محافظت می‌کند. مشابه مهره شاه سفید، تعقیب‌کننده نیز تصویر فراری را دنبال می‌کند. هر زمان که فراری به‌صورت افقی به سمت آن تصویر حرکت کند تعقیب‌کننده می‌تواند خط مرزی را به‌صورت عمودی جلو ببرد. سرانجام فراری بین خط مرزی و خط محافظت شده محبوس می‌گردد که در این صورت دستگیر خواهد شد.

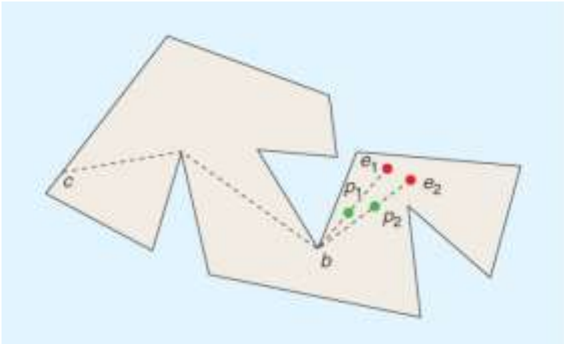
دربخش بعدی به بررسی مدل‌های بازی جنگ پیچیده‌تری می‌پردازیم. مناطقی که بازی در آنها مدل‌بندی شده است، نامحدب می‌باشند. به عنوان مثال منطقه‌ای کوهستانی را در نظر بگیرید که برای نمونه پهباد باید در ارتفاع پایین نسبت به سطح زمین حرکت کند. این حرکت در ارتفاع پایین دارای این مزیت است که رادارها نمی‌توانند آنها را ردیابی کنند.

بررسی مدل‌های پیچیده‌تر

در این‌بخش یه بررسی مدل‌های پیچیده‌تر از جمله "راهبرد شیر" می‌پردازیم. با توجه به [۲۵] نماد و مطالب زیر را داریم.

نمادگذاری. در این قسمت منظور از $O(f(n))$ مجموعه تمام تابع‌های $g(n)$ است به طوریکه اعداد مثبت n_0 و C وجود دارند با این ویژگی که برای تمام $n \geq n_0$ها رابطه $|g(n)| < cf(n)$ برقرار باشد. به عنوان مثال منظور از $O(n)$ تمام تابع‌های $g(n)$ است که برای بعضی Cها و تمام مقادیر بزرگ n رابطه $|g(n)| < cn$ برقرار باشد.

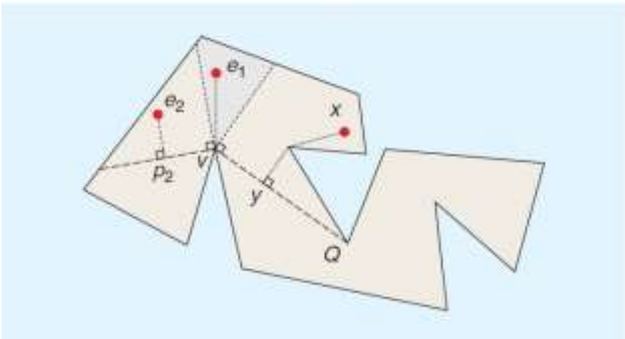
ایسلر و همکاران [۲۹] راهبر شیر در منطقه بازی به شکل زیر (شکل ۵) با نام P را مورد بررسی قرار دادند. ابتدا تعقیب‌کننده از نقطه c در شکل P شروع به حرکت می‌کند. این نقطه روی مرز شکل P قرار دارد. بعد از آن تعقیب‌کننده از کوتاه‌ترین راه‌ها بین نقطه c و تعقیب‌شونده حرکت می‌کند تا هر چه بیشتر به e نزدیکتر شود. قابل توجه است که این کوتاه‌ترین راه می‌تواند با مرز شکل در ارتباط باشد. در این حالت به صورت مسیرهای خطی قطعه‌ای حرکت می‌کند. برای شکل P قرار دهید $diam(P) = \max_{u,v\in P} d(u,v)$. بوریج و همکارش [۳۰] نشان دادند که زمان دستگیری $O(diam(P))^2$ است. ژو و همکارانش [۳۱] نشان دادند که با اضافه کردن یک تعقیب‌کننده دیگر زمان دستگیری به $O(diam(P))$ کاهش می‌یابد.



شکل(۵) P

تصویرهای نزدیکترین نقطه

فرض کنید Q شکل زیر باشد(شکل ۶). نقاط مرزی v و u از شکل Q را در نظر بگیرید. فرض کنید Γ کوتاه‌ترین مسیر یکتا بین آن دو نقطه باشد. تصویر نزدیکترین نقطه را نگاشت $\rho: S \to \Gamma$ در نظر بگیرید که نقطه $x \in Q$ را به نزدیکترین $y \in \Gamma$ نگاشت می‌کند. تصویر عمودی حالت خاص از تصویر نزدیکترین نقطه است. همانند منطقه بازی مربع شکل در مدل‌های بالا، تعقیب‌کننده می‌تواند یک مکان دفاعی روی Γ در نظر بگیرد، از آن حفاظت کند و در نهایت در گوشه‌ای از شکل Q تعقیب‌شونده را متوقف و دستگیر کند.



شکل (۶) Q

بحث و نتیجه‌گیری

ما در این مقاله چندین مدل بازی تعقیب و گریز را بررسی کردیم. در هر مدل شکلی ارائه شد تا بازی از لحاظ بصری نیز گویا باشد. پس از آن به‌صورت مشخص راهبرد بازیکنان انتخاب شده و شرط کافی برای کامل‌شدن پیگرد بدست آمده است. برای طراحی بازی جنگ هوایی مدل‌های مختلفی برای تعقیب‌کننده‌ها بوجود می‌آید. طراح بازی باید همه آنها را در نظر بگیرد. ما در این مقاله چهار مدل را بررسی کردیم. در این مدل‌ها دو فاز برای دستگیری تعقیب‌شونده مد نظر است، یکی اینکه تعقیب‌شونده را مجبور به ترک محل مانورش کنیم و دیگری محافظت از این محدوده است. در حالت

اول مدلی بیان کردیم که بر اساس آن اگر تعقیب‌شونده فقط به راست یا فقط به چپ حرکت کند و در حرکت بعدی خود بخواهد عمودی حرکت کند و از خط مذکور عبور کند، راهبرد تعقیب‌کننده به گونه‌ای انتخاب شده‌است که دستگیری تعقیب‌شونده حتمی است. برای تطبیق این موضوع بر بازی جنگ به این صورت بیان می‌کنیم که، چون در این بازی دو طرف بازی از وضعیت زمانی و مکانی هم اطلاع دارند، اگر مهاجم در تلاش برای عبور از خط فرضی در ناحیه مدافع باشد آنگاه مدافع یا همان تعقیب کننده در راستای عبور مدافع قرار می‌گیرد که یا دستگیری اتفاق می‌افتد یا با موشک منهدم می‌شود. اگر جنگنده مهاجم فقط به طرف راست یا فقط به طرف چپ حرکت کند و سپس قصد عبور از خط فرضی را داشته باشد، بلافصله مدافع خود را بر تصویر عمودی مهاجم منطبق می‌کند و در حرکت عمودی مهاجم آن را منهدم می‌کند. در حالت دوم مدلی بیان کردیم که بر اساس آن اگر تعقیب‌شونده به چپ و به راست بدون هیچ محدودیتی در محیط بازی جابجا شود، تعقیب‌کننده هیچ وقت نمی‌تواند تعقیب‌شونده را دستگیر کند. چون فقط می‌تواند از عبور فراری از خط مذکور جلوگیری کند و دیگر قادر به محدود کردن فضای مانور نیست. در حالت دوم نیز برای تطبیق بر بازی جنگ، طبق راهبرد بیان شده چون قرار است علاوه بر دفاع از خط و ناحیه معین شده، فضای مانور مهاجم نیز محدود شود، در این حالت جنگنده مدافع از انجام پیشروی خط دفاعی و محدود کردن فضای مانور جنگنده مهاجم باز می‌ماند. زیرا فقط می‌تواند با منطبق کردن تصویر عمودی مهاجم از عبور کردن جلوگیری کند. در حالت سوم مدلی بیان کردیم که مشکل مدل دوم رفع شده است و بر اساس راهبردهای ارائه شده تعقیب‌کننده‌ها حتما تعقیب‌شونده را دستگیر می‌کنند. در این مدل براساس حرکت تعقیب‌شونده یکی از تعقیب‌کننده‌ها از خط مذکور دفاع می‌کند و دیگری همزمان فضای مانور تعقیب‌شونده را کاهش می‌دهد. چون فضا و زمان بازی محدود هستند، دستگیری تعقیب‌شونده حتمی است. برای تطبیق بر بازی جنگ این گونه بیان می‌کنیم که هدف دستگیری یا انهدام است. چون راهبرد به گونه‌ای است که یک مدافع از خط مذکور در ناحیه خود دفاع می‌کند و مدافع دیگر همزمان فضای مانور را کاهش می‌دهد. این فرایند تا مرحله‌ای پیش می‌رود که دستگیری انجام شود. انهدام در صورتی انجام می‌شود که جنگنده مهاجم به یکی از خطوط دفاعی بدون توجه به استراتژی مدافع نزدیک شود و قصد عبور از آن را داشته باشد. در حالت چهارم مدلی بیان کردیم که تعقیب‌کننده‌ها یک رخ و یک شاه سفید و تعقیب‌شونده یک شاه سیاه است. بر اساس نوع و محدودیت‌های حرکتی این بازیکنان راهبردی ارائه کردیم که بر اساس آن شاه سیاه در آخر در یک محدوده گیر می‌افتد و مات می‌شود. پیش‌بینی می‌شود که حالت‌های مختلف بازی شطرنج و راهبردهای متنوع این بازی برای پیروزی، در طراحی بازی جنگ هوایی پرکاربرد باشد. ما در این مقاله، بازیکنان مدل‌ها و مهره‌های شطرنج را بر بازی جنگ هوایی منطبق کردیم. در صورت جنگ هوایی و حمله هواپیمای مهاجم قابل هدایت، دو راهبرد کلی برای دفاع و پیروزی جنگنده هوایی مدافع این جنگ هوایی بیان شده است. یک راهبرد انهدام هواپیمای مهاجم است. دومین راهبرد دستگیری هواپیمای مهاجم است. در راهبرد

انهدام یک جنگنده هوایی مدافع فضای مانور هواپیمای مهاجم را محدود می‌کند و دیگری در زمان مناسب با شلیک موشک هواپیمای مهاجم را منهدم می‌کند. در راهبرد دستگیری لازم نیست موقعیت مکانی جنگنده هوایی مدافع و هواپیمای مهاجم یکی شود ولی همچنان دستگیری اتفاق می‌افتد و هواپیمای مهاجم از کار می‌افتد.

قدردانی

از کلیه اساتید و خبرگانی که با صرف وقت ارزشمند خود در خصوص تکمیل و انجام این پژوهش ما را یاری نمودند کمال تشکر را داریم.

منابع

[1] Faruqi, F. A. (2017). Differential game theory with applications to missiles and autonomous systems guidance. John Wiley & Sons.

[2] Biranvand, N. , M. Yaghobian, and H. Bigdeli. (2021). Air Defense Differential Games with Constraints on Aircraft and Non-Zero Capture Radius. journal of Advanced Defense Science and Technology, **12**(1): p. 23-35.

[3] Hájek, O. (2008). Pursuit games: an introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion, Courier Corporation.

[4] Petrosyan, L. (1977) Differential pursuit games. Izdat. Leningrad. Univ. , Leningra.

[5] PJ, P. N. (2007). Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[6] Isaacs, R. (1999). Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization. Courier Corporation.

[7] Chen, K. , J. Lei, and B. Li. (2021). The Pursuit-Evasion Game Strategy of High-Speed Aircraft Based on Monte-Carlo Deep Reinforcement Learning. in Proceedings of 5 th Chinese Conference on Swarm Intelligence and Cooperative Control. Springer.

[8] Ibragimov, G. I. , M. Salimi, and M. Amini, (2012). Evasion from many pursuers in simple motion differential game with integral constraints. European Journal of Operational Research, 218(2) p. 505-511.

[9] Salimi, M. , G. Ibragimov, S. Siegmund, S. Sharifi. (2016). On a fixed duration pursuit differential game with geometric and integral constraints. Dynamic Games and Applications, **6**(3): p. 409-425.

[10] Blaquière, A. , F. Gérard, and G. Leitmann. (1969). Quantitative and Qualitative Games by Austin Blaquiere, Francoise Gerard and George Leitmann. Academic Press.

[11] Tang, X. , Y. Dong, L. Huang, Z. Sun, J. Sun. (2021) Pursuit-evasion game switching strategies for spacecraft with incomplete-information. Aerospace Science and Technology, **119** p. 107-112.

[12] Yan, R. , Z. Shi, and Y. Zhong. (2021). Cooperative strategies for two-evader-one-pursuer reach-avoid differential games. International Journal of Systems Science, **52**(9): p. 1894-1912.

[13] Ibragimov, G. , M. Ferrara, I. A. Alias, M. Salimi, N. Ismail. (2022). Pursuit and evasion games for an infinite system of differential equations. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. **45**(1): p. 69-81.

[14] Salimi, M. (2020). A pursuit-evasion game with hybrid system of dynamics. Mathematical Methods in the Applied Sciences. https: //doi. org/10. 1002/mma. 7053.

[15] Sharifi, S. , A. J. a. Badakaya, and M. Salimi. (2022). On game value for a pursuit-evasion differential game with state and integral constraints. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **39**(2): p. 653-668.

[16] Qi, D. , L. Li, H. Xu, Y. Tian, H. Zhao. (2021). Modeling and Solving of the Missile Pursuit-Evasion Game Problem. in 2021 40th Chinese Control Conference (CCC). IEEE.

[17] Pontani, M. and B. A. Conway. (2008). Optimal interception of evasive missile warheads: Numerical solution of the differential game. Journal of guidance, control, and dynamics,. **31**(4): p. 1111-1122.

[18] Altaher, M. , O. Nomir, and S. ElMougy. (2020). Intercepting a Superior Missile: Trajectory Optimization Approach to a Pursuit-Evasion Game. International Game Theory Review, **22**(04): p. 1-21.

[19] Perelman ,A. , T. Shima, and I. Rusnak. (2011). Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **34**(3): p. 761-773.

[20] Croft, H. T. (1964). “Lion and man”: a postscript. Journal of the London Mathematical Society, **1**(1): p. 385-390.

[21] Ferrara, M. , G. Ibragimov, I. A. Alias, M. Salimi. (2020). Pursuit differential game of many pursuers with integral constraints on compact convex set. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, **43**(4): p. 2929-2950.

[22] Ahmed, I. , P. Kumam, G. Ibragimov, J. Rilwan, W. Kumam. (2019) An optimal pursuit differential game problem with one evader and many pursuers. Mathematics. **7**(9): p. 842.

[23] Von Moll, A. , D. Casbeer, E. Garcia, D. Milotinovic, M. Pachter. (2019). *The multi-pursuer single-evader game.* Journal of Intelligent & Robotic Systems, **96**(2) p. 193-207.

[24] Azamov, A. A. , A. S. Kuchkarov, and A. G. Holboyev. (2019). The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of a regular polyhedron. ii. Automation and Remote Control, **80**(1): p. 164-170.

[25] Noori, N. , A. Beveridge, and V. Isler. (2016). Pursuit-evasion: A toolkit to make applications more accessible [tutorial]. IEEE Robotics & Automation Magazine. **23**(4): p. 138-149.

[26] Mirzavaziri, M. (2009). Metric spaces with topological flavour, Ferdowsi University of Mashhad, 437.

[27] Apostol, T. M. (1957). Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus. Addison-Wesley Publishing Company.

[28] Bhadauria, D. , K. Klein, V. Isler, S. Suri.. (2012). Capturing an evader in polygonal environments with obstacles: The full visibility case. The International Journal of Robotics Research, **31**(10): p. 1176-1189.

[29] Isler, V. , S. Kannan, and S. Khanna. (2005). Randomized pursuit-evasion in a polygonal environment. IEEE Transactions on Robotics, **21**(5): p. 875-884.

[30] Beveridge, A. and Y. Cai. (2015). Two-dimensional pursuit-evasion in a compact domain with piecewise analytic boundary. arXiv preprint arXiv: 1505. 00297.

[31] Zhou, Z. , J. R. Shewchuk, H. Huang, and C. J. Tomlin. (2012). Smarter lions: Efficient full-knowledge pursuit in general arenas. Citeseer.