دوفصلنامه بازی جنگ، دوره ۳، شماره ۶، بهار و تابستان ۱۳۹۹

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۰۳ | تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۰۶

از صفحه ۷ تا صفحه ۲۹

برنامه‌ریزی دوسطحی برای مدلسازی یک بازی مهاجم-مدافع چندهدفی با محدودیت تخصیص بودجه و حل آن با استفاده از یک رهیافت شبکه عصبی

محمد مقدس[۱]، ابراهیم ایجابی[۲]

چکیده

تخصیص مؤثر بودجه دفاعی یکی از وظایف مهم دولت‌ها در مبارزه با تروریسم است. در این مقاله، با استفاده از بهینه‌سازی دوسطحی و بازی حرکت پی‌درپی، یک بازی جدید مهاجم-مدافع چندهدفی به همراه محدودیت بودجه را به منظور مدلسازی روابط راهبردی متقابل بین مهاجم (تروریست‌ها) و مدافع (دولت‌ها) معرفی می‌کنیم. ما بر انواع مختلف حمله‌ی اتخاذ شده از سوی مهاجم تمرکز می‌کنیم. با استفاده از شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر، مسأله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی پیشنهادی به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی یک سطحی با محدودیت‌های مکمل تقلیل داده می‌شود. سپس با استفاده از تابع فیشر-برمیستر اختلالاتی، نظریه بهینه‌سازی و بعضی مفاهیم معادلات دیفرانسیل معمولی، یک شبکه عصبی توانمند برای حل این مسأله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی یک سطحی طراحی می‌کنیم. نشان داده می‌شود که شبکه عصبی معرفی شده پایدار مجانبی و همگرا به جواب بهینه مسأله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی است. در پایان با استفاده از دو سناریو، عملکرد و اعتبار روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: بازی مهاجم-مدافع، نظریه بازی، تخصیص بودجه، بهینه‌سازی دوسطحی، شبکه‌های عصبی.

[۱] پژوهشگر، پژوهشکده عالی جنگ، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا، moh.moghaddas.sci@iauctb.ac.ir

[۲] عضو هیئت علمی دانشگاه فرماندهی و ستاد ارتش، ebrahimijabi@yahoo.com

Bi-level programming for modeling a multi-target attacker-defender game with budget allocation constraint and solving it using a neural network approach

Moghaddas M.[۱], **Ijabi E.**[۲]

ABSTRACT

Effective allocation of the defense budget is one of the important duties of governments in the fight against terrorism. In this paper, using the bi-level optimization and the sequential-move game, we introduce a new multi-target attacker-defender game with budget constraints to model the strategic interactions between attacker (terrorists) and defender (governments). We focus on the different types of attacks adopted by the attacker. Using the Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions, the proposed bi-level programming problem is reduced to a one-level mathematical program with complementarity constraints. We then design a capable neural network to solve this one-level mathematical programming problem by using the perturbed Fischer-Burmeister function, optimization theory, and some concepts of ordinary differential equations. It is shown that the proposed neural network is asymptotic stable and convergent to the optimal solution of the bi-level programming problem. Finally, we show the performance and validity of the proposed method by using two scenarios.

KEYWORDS: Attacker-defender game, Game theory, Budget allocation, Bi-level optimization, Neural networks.

[1] Researcher, Institute for the study of war, Aja Command and Staff University

[2] Assistant Professor, Aja Command and Staff University

۱- مقدمه

محافظت از مردم در برابر تروریسم برای دولت ها یک مسأله مهم و چالش برانگیز است. دولت‌ها باید بودجه دفاعی محدود را طوری تخصیص دهند که بیشترین کارایی و اثربخشی حاصل گردد. تروریست‌ها انواع مختلف حمله از جمله ترور، انفجار، مبارزه مسلحانه، آدم ربایی و ... را به کار می‌گیرند. آگاهی از اهداف و انگیزه‌های مهاجم (تروریست) به مدافع (دولت) کمک می‌کند تا از مهمترین اهداف خود محافظت کند و از هدر رفتن تلاش‌هایش اجتناب کند.

نظریه بازی، شاخه ای از ریاضیات کاربردی است که موقعیت‌های تضاد منافع را مورد مطالعه قرار می‌دهد و تلاش می‌کند تا از نظر ریاضی رفتارها و تصمیم‌گیری‌ها را در موقعیت‌های راهبردی تحلیل کند کند. نظریه بازی به طور گسترده در تصمیم گیری در مورد راهبردهای دفاعی استفاده می‌شود. برای مثال، براون و همکاران[1] [۴] سه مدل مهم برای محافظت از زیرساخت‌ها را با حرکات پی‌درپی متفاوت پیشنهاد و آنها را با استفاده از سه سناریو از ذخیره‌ی راهبردی نفت ، گشت مرزی و شبکه‌های برق نمایش دادند. برای پیش از یک دهه پژوهشگران زیادی نظریه بازی را برای تحلیل و پیش بینی حوادث تروریستی به کار گرفته‌اند [۳، ۱۳، ۱۵، ۲۲]. همچنین در ادبیات انواع حملات چندگانه مورد مطالعه قرار گرفته اند. الدور و ملنیک[2] [۷] در مورد حالت‌های مختلف حمله بحث می‌کنند. فیلیپس[3] [۱۴] از نظریه سبد سرمایه برای بررسی ماهیت مجموعه‌ی انتخاب گروه تروریستی (روش حمله) و ویژگی‌های کارایی آن استفاده می‌کند. زو و ژوانگ[4] [۲۰] یک بازی پی‌درپی را با یک مدافع و N

[1] Brown et al.
[2] Eldor and Melnick
[3] Phillips
[4] Xu and Zhuang

مهاجم را مطالعه کردند. گوان و همکاران[1] [۸] بازی مهاجم-مدافع چندهدفی را با محدودیت بودجه هم برای مدافع و هم برای مهاجم مدل‌سازی کردند. آنها اثرگذاری محدودیت‌های بودجه، ارزش اهداف، اثربخشی هزینه‌ی سرمایه گذاری‌های و سطوح دفاعی اهداف را در هر دوحالت بازی حرکت همزمان و بازی حرکت پی‌درپی بر راهبردهای تعادل مدافع و مهاجم بررسی کردند.

با وجود آن که برخی پژوهشگران بازی استکلبرگ[2] را برای مدلسازی بازی مهاجم-مدافع چندهدفی با محدودیت بودجه به کار گرفته‌اند اما به دلیل دشواری‌های مسأله‌ی دوسطحی حاصل شده و عدم به‌کارگیری روش‌های کارا برای حل آن، نتایج مشخص و دقیقی از کار آنها نتیجه نمی‌شود. حل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی اولین بار توسط تانک و هاپفیلد[3] در سال۱۹۸۶ انجام شد [۱۶]. کندی و چا با افزودن یک پارامتر جریمه متناهی به شبکه هاپفیلد آن را توسعه دادند و از آن برای حل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی محدب استفاده نمودند [۹]. همچنین محققان زیادی براساس روش لاگرانژ، روش تابع تصویر و دیگر روش‌ها، مدل‌های شبکه عصبی متنوعی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و به خصوص برنامه‌ریزی دوسطحی معرفی کرده‌اند [۶، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۸، ۱۹، ۲۱].

در این مقاله ابتدا بازی مهاجم-مدافع چندهدفی به همراه محدودیت بودجه را با استفاده از برنامه‌ریزی دوسطحی با تمرکز بر حمله اتخاذ شده از سوی مهاجم و با به کارگیری بازی پی‌درپی[4]، مدلسازی می‌کنیم. ساختار این مدل، سلسله مراتبی است بدین معنا که حرکت اول را مدافع انجام می‌دهد یعنی تخصیص منابع را مشخص می‌کند سپس مهاجم بهترین راهبرد خود را انتخاب می‌کند به

[1] Guan et al.
[2] Stackelberg game
[3] Tank and Hopfield
[4] Sequential game

طوری که تابع هدف مسأله‌ی سطح پایین بیشینه شود. در پایان مدافع با اطلاع از این انتخاب، راهبرد تخصیص بهینه خود را انتخاب می‌کند تا تابع هدف مسأله‌ی سطح بالا کمینه گردد. سپس با استفاده شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر[1] و نظریه سیستم‌های دینامیکی یک مدل شبکه عصبی زمان پیوسته برای حل مسأله بهینه‌سازی دوسطحی هدفی معرفی شده، طراحی می‌شود. ثابت می‌شود شبکه عصبی معرفی شده پایدار مجانبی و همگرا به جواب بهینه مسأله بهینه‌سازی دوسطحی معرفی شده است. در پایان شبیه‌سازی عددی با دو سناریوی مختلف برای نشان دادن کارایی مدل معرفی شده انجام می‌شود.

۲- مبانی نظری

۱-۲- نماد گذاری‌ها و مفروضات

نمادهای استفاده شده در این مقاله در جدول ۱ معرفی شده‌اند. اندیس‌های اهداف و نوع حمله به ترتیب با i و j نمایش داده می‌شوند. برای راهبرد حمله با بیشترین خسارت مورد انتظار، (i', j') برای مشخص کردن نوع هدف و حمله به کار می رود. کل بودجه دفاعی در اختیار مدافع B است. احتمال کل حملات مهاجم با R مشخص می‌شود. کل خسارت وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j با $D_{i,j}$ نمایش داده می‌شود. احتمال موفقیت یک حمله نوع j در هدف i با $p_{i,j}(b_i)$ نمایش داده می‌شود. $C_{i,j}$ اثربخشی هزینه دفاعی را نشان می‌دهد. این بدان معناست که اگر دفاع مؤثر کل b_i یک واحد افزایش یابد آنگاه احتمال موفقیت تقریباً به وسیله $100C_{i,j}$٪ احتمال کل $p_{i,j}(b_i)$ کاهش می‌یابد. برای نشان دادن آن که تخصیص بودجه دفاعی چقدر بر احتمال

[1] Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

موفقیت یک حمله اثرگذار خواهد بود، مطابق با آنچه بیر و همکاران۱ [۳] و شان و ژوانگ۲ [۱۵] انجام داده‌اند، از تابع نمایی زیر را به عنوان تابع احتمال موفقیت در یک حمله به کار می‌بریم:

$$p_{i,j}(b_i) = \exp(-C_{i,j} b_i), \quad \forall i, j. \qquad (۱)$$

شکل (۱) نشان می‌دهد در معادله‌ی (۱)، $C_{i,j}$ بزرگتر یک تخصیص مؤثرتر را در پی خواهد داشت. همان طور که می‌بینیم احتمال موفقیت زمانی که $C_{i,j} = 0.02$ در مقایسه با زمانی که $C_{i,j} = 0.002$ خیلی سریعتر کاهش می‌یابد.

تخصیص‌های بودجه دفاعی مدافع b و احتمال حمله برای مهاجم r متغیرهای تصمیم هستند. به‌طور خاص متغیر b_i تخصیص بودجه دفاعی به هدف i است و $b = (b_1, \ldots b_n$ بردار تخصیص بودجه دفاعی برای تمام اهداف است. به طور مشابه متغیر $r_{i,j} \geq 0$ احتمال آن که مهاجم به هدف i حمله نوع j را انجام دهد است. احتمال حمله کل با R مشخص می‌شود. در حل مدل c^* و r^* راهبردهای تعادل (جواب‌های بهینه) به ترتیب برای مدافع و مهاجم هستند. $U_D(r,b)$ و $U_A(r,b)$ به ترتیب خسارت‌های مورد انتظار برای مدافع و مهاجم هستند.

در این مقاله ما بر انواع حمله اتخاذ شده از سوی مهاجم متمرکز هستیم. مشابه با [۱] و [۱۷] فرض عقلانیت۳ و راهبرد۴ هم برای مدافع و هم برای مهاجم به کار گرفته می‌شود. در این مقاله رفتار متقابل بین مدافع و مهاجم را با یک بازی

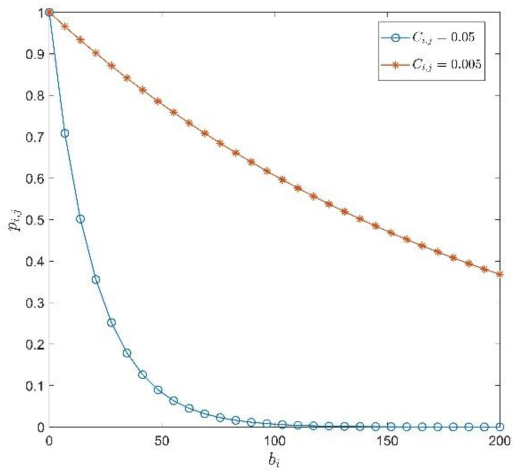
---

1 Bier et al.
2 Shan and Zhuang
3 Rationality
4 Strategic

پی‌درپی مدلسازی می‌کنیم. همچنین فرض بر این است که مهاجم به اطلاعات کامل مدافع دسترسی دارد یعنی می‌تواند تخصیص مدافع را مشاهده کند و مقادیر پارامترها را می‌داند. در این بازی مدافع حرکت اول را انجام می‌دهد یعنی تخصیص b را مشخص می‌کند. مهاجم b را مشاهده می‌کند و سپس یک هدف و یک نوع حمله برای هجوم انتخاب می‌کند. همچنین مدافع از راهبرد مهاجم برای تخصیص بودجه خود آگاه است و بهترین پاسخ مهاجم را برآورد می‌کند. بر اساس بهترین پاسخ مهاجم، مدافع راهبرد تخصیص بهینه خود را انتخاب می‌کند.

جدول ۱. نمادهای استفاده شده.

پارامترها	
$i=\{1,...,n\}$	اندیس اهداف، به طوری که n تعداد کل اهداف است
$j=\{1,...,m\}$	اندیس نوع حمله، به طوری که m تعداد کل انواع حمله است
B	کل بودجه دفاعی در دسترس مدافع
R	احتمال کل حملات
$D_{i,j}$	خسارت کل وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j
$C_{i,j}$	اثربخشی هزینه دفاعی در برابر حمله نوع j در هدف i
b^* و r^*	راهبردهای تعادل (جواب‌های بهینه) برای مدافع و مهاجم
متغیرهای تصمیم	
$b_i \geq 0$	بودجه دفاعی تخصیص داده شده به هدف i
$b=(b_1,...,b_n)$	بردار تخصیص بودجه دفاعی برای تمام اهداف
$r_{i,j} \geq 0$	احتمال آن که مهاجم به هدف i حمله نوع j را انجام دهد.
r	ماتریس احتمال حمله مهاجم با درایه‌های $r_{i,j}$
توابع	
$p_{i,j}(b_i)$	احتمال موفقیت یک حمله نوع j در هدف i
$U_D(r,b)$	خسارت مورد انتظار مدافع
$U_A(r,b)$	خسارت مورد انتظار مهاجم



شکل ۱. نمایش تابع احتمال موفقیت با دو مقدار متفاوت پارامتر

۲-۲- شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر

مسأله برنامه ریزی غیرخطی محدب را در حالت کلی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \le 0, \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{۲}$$

به طوری که $x \in R^s$ ، $f: R^s \to R$ و $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_e(x))^T$ یک تابع بردار مقدار پیوسته‌ی e-بعدی است. فرض می‌شود توابع f، g_1، g_2، ... ، g_e محدب و دو بار مشتق‌پذیر هستند و $h(x) = Ax - b$، $A \in R^{q \times s}$ ، $\text{rank}(A) = q \ (0 \le q < s)$ و $b \in R^q$.

تابع لاگرانژ[1] مسأله (۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L(x,u,v) = f(x) + \sum_{k=1}^{e} u_k g_k(x) + \sum_{l=1}^{q} v_l h_l(x)$$

[1] Lagrange function

که $u \in R^e$ و $v \in R^q$ ضرایب لاگرانژ نامیده می‌شوند. می‌دانیم که $x^* \in R^s$ جواب بهینه مسأله‌ی (۲) است اگر و تنها اگر $u^* \in R^e$ و $v^* \in R^q$ وجود داشته باشند به طوری که $(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T})^T$ در شرایط کاروش-کان-تاکر زیر صدق کنند [۲]:

$$\begin{cases} u^* \geq 0, \;\; g(x^*) \leq 0, \;\; u^{*T} g(x^*) = 0, \\ \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* + \nabla h(x^*)^T v^* = 0, \\ h(x^*) = 0. \end{cases}$$

x^* یک نقطه KKT مسأله‌ی (۲) و دوتایی $(u^{*T}, v^{*T})^T$ بردار ضرایب لاگرانژ متناظر با x^* نامیده می‌شوند.

۳- مدل برنامه‌ریزی دوسطحی برای بازی مهاجم-مدافع چندهدفی با محدویت بودجه

۳-۱- فرمول بندی

در این بخش رفتار متقابل بین مدافع و مهاجم را به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی فرمول‌بندی می‌کنیم به طوری که مدافع در سطح بالا بودجه B را به n هدف تخصیص می‌دهد تا خسارت مورد انتظار کل را کمینه کند. مهاجم نیز در سطح پایین راهبرد حمله r را انتخاب می‌کند تا خسارت مورد انتظار کل را بیشینه کند. خسارت یا ریسک مورد انتظار این چنینی یک تابع شامل سه مؤلفه است: تهدید[1](که توسط احتمال‌های حملات در اهداف مختلف محاسبه می‌شود ، آسیب پذیری[2] (که به وسیله احتمال‌های موفقیت آن حملات به صورت تابعی از تخصیص بودجه دفاعی محاسبه می‌شود) و پیامد[3] (که به وسیله خسارت کل وارد شده به اهداف مشخص می‌شود) [۱۷] در این

[1] Threat
[2] Vulnerability
[3] Consequence

مدل تهدید به صورت احتمال $r_{i,j}$، آسیب پذیری به صورت احتمال موفقیت در یک حمله $p_{i,j}$ و پیامد به صورت خسارت کل $D_{i,j}$ مدل می‌شوند. مقادیر تابع هدف برای مدافع و مهاجم یکسان هستند. مدل برنامه‌ریزی دوسطحی برای بازی مهاجم-مدافع به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(\text{UP}) \quad \min_{b} \quad U_D(r,b)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} \\
&\qquad\quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = B, \\
&\qquad\qquad\quad b_i \ge 0, \quad \forall i=1,\dots,n. \\
&(\text{LP}) \quad \max_{r} \quad U_A(r,b)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} \\
&\qquad\quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} = R, \\
&\qquad\qquad\quad r_{i,j} \ge 0, \quad \forall i=1,\dots,n, \quad \forall j=1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۳}$$

این مسأله، یک بازی استکلبرگ نیز نامیده می‌شود. همان طور که در قبل نیز اشاره شد در مسأله (۳) مدافع حرکت اول را انجام می‌دهد یعنی تخصیص b را مشخص می‌کند. سپس مهاجم بهترین راهبرد خود یعنی $r(b)$ را انتخاب می‌کند به طوری که تابع هدف مسأله سطح پایین (LP) بیشینه شود. در پایان مدافع با اطلاع از این انتخاب، راهبرد تخصیص بهینه خود را انتخاب می‌کند تا تابع هدف مسأله سطح بالا (UP) کمینه شود.

۳-۲- تبدیل مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی به مسأله یک سطحی معادل

از آنجا که برای:

$$b \in \left\{ b \mid \exists r \in \mathbb{R}^{nm}, \sum_{i=1}^{n} b_i = B, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} = R, b_i \ge 0,\ r_{i,j} \ge 0,\ \forall i,j \right\}$$

ثابت، مسأله LP در (۳) یک مسأله بهینه‌سازی محدب است، می‌توان با جایگزینی مسأله LP با شرایط بهینگی KKT، مسأله دوسطحی (۳) را به مسأله یک سطحی زیر تقلیل داد [۱۰]:

$$\begin{aligned}
\min_{b,r,\lambda,\mu} \quad & U_D(r,b) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i = B, \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} = R, \\
& \nabla_r L(b,r,\lambda,\mu) = 0, \\
& \text{-}b_i \le 0, \quad \forall i = 1,\dots,n, \\
& \text{-}r_{i,j} \le 0, \quad \forall i = 1,\dots,n, \quad \forall j = 1,\dots,m, \\
& \text{-}r_{i,j}\lambda_{ij} = 0, \quad \forall i = 1,\dots,n, \quad \forall j = 1,\dots,m, \\
& \lambda_{ij} \ge 0, \quad \forall i = 1,\dots,n, \quad \forall j = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۴}$$

که $L(b,r,\lambda,\mu)$ تابع لاگرانژ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(b,r,\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} r_{i,j} + \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} - R\right),$$

به طوری که $\lambda \in \mathbb{R}^{nm}$ و $\mu \in \mathbb{R}$ ضرایب لاگرانژ هستند. مسأله (۴) نامحدب و مشتق ناپذیر است. در این مقاله با استفاده از ایده تابع فیشر-برمیستر اختلالاتی[1] [۵] تقریب هموار از تبدیلات KKT در مسأله (۴) می‌سازیم.

تعریف ۱. تابع فیشر-برمیستر اختلالاتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{FB}^{\varepsilon}(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2 + \varepsilon} - a - b, \quad \varepsilon \to 0^+ \tag{۵}$$

[1] The perturbed Fischer–Burmeister function

این تابع همه جا به طور پیوسته مشتق پذیر است و بـه عـلاوه بـرای هـر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\phi_{FB}^{\varepsilon}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a > 0,\ b > 0,\ ab = \frac{\varepsilon}{2}.$$

با استفاده از تابع فیشر-برمیستر اختلالاتی (۵)، مسأله (۴) را می‌توان به صـورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\min_{b,r,\lambda,\mu}\ \ & U_D(r,b) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} \\
\text{s.t.}\ \ & \sum_{i=1}^{n} b_i = B, \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} = R, \\
& \nabla_r L(b,r,\lambda,\mu) = 0, \\
& -b_i \le 0,\ \ \forall i = 1,\dots,n, \\
& \phi_{FB}^{\varepsilon}(\lambda_{ij}, r_{i,j}) = 0,\ \ \forall i = 1,\dots,n,\ \ \forall j = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۶}$$

برای سادگی در نمادگذاری با قرار دادن:

$$G(w) = -b^T$$

$$H(w) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i - B \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} - R \\ \nabla_r L(b,r,\lambda,\mu) \\ \phi_{FB}^{\varepsilon}(\lambda_{ij}, r_{i,j}),\ \ \forall i,j \end{pmatrix}$$

و $w = (b,r,\lambda,\mu)$ مسأله (۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min_{w}\ \ & \xi(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\, p_{i,j}(b_i) D_{i,j} \\
\text{s.t.}\ \ & G_k(w) \le 0,\ \ k = 1,\dots,n, \\
& H_l(w) = 0,\ \ l = 1,\dots,mn+3.
\end{aligned} \tag{۷}$$

تعریف ۲. فرض کنید w یک جواب شدنی مسأله (۷) باشد و $K=\{k\,|\,G_k(w)=0,\ k=1,\ldots,n\}$. گوییم w یک نقطه منظم است اگر $\nabla H_1(w)$، ... و $\nabla H_{mn+3}(w)$، $\nabla G_k(w)$، $k\in K$ مستقل خطی هستند.

قضیه ۱ ([۵]). فرض کنید $\{w^{\varepsilon}\}$ یک دنباله از جواب‌های مسأله (۷) باشد. فرض کنید که دنباله $\{w^{\varepsilon}\}$ به ازای $\varepsilon\to 0^+$ همگرا به $\bar{w}$ باشد، آنگاه $\bar{w}$ یک جواب ایستای بولیگاند[1] برای مسأله‌ی دوسطحی (۳) نامیده می‌شود.

۴- مدل شبکه عصبی برای حل مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی

تابع لاگرانژ مسأله (۷) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L(w,Y,\gamma,\beta)=\xi(w)+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\left(G_k(w)+Y_k^2\right)+\sum_{l=1}^{mn+3}\beta_l H_l(w), \qquad (۸)$$

به طوری که $Y\in\mathrm{R}^n$ متغیر کمکی است و $\gamma\in\mathrm{R}^n$ و $\beta\in\mathrm{R}^{mn+3}$ ضرایب لاگرانژ هستند.

حال ما یک مدل شبکه عصبی به شکل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برای حل مسأله (۳) به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{dL}{dw_i}=-\dfrac{\partial\xi}{\partial w_i}-\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\dfrac{\partial G_k}{\partial w_i}-\sum\limits_{l=1}^{mn+3}\beta_l\dfrac{\partial H_l}{\partial w_i}, & i=1,\ldots,2mn+n+1,\\[2mm] \dfrac{dL}{dY_k}=-2\gamma_k Y_k, & k=1,\ldots,n,\\[2mm] \dfrac{dL}{d\gamma_k}=G_k(w)+Y_k^2, & k=1,\ldots,n,\\[2mm] \dfrac{dL}{d\beta_l}=H_l(w), & l=1,\ldots,mn+3.\end{cases} \qquad (۹)$$

---

[1] Bouligand stationary solution

پیچیدگی یک شبکه عصبی را می‌توان با شمارش تعداد پردازنده‌ها[1]، انتگرال‌گیرها[2] و اتصالات میانی[3] تعیین کرد. شبکه عصبی (۹) دارای $mn(2mn+3n+10)+n^2+6n+7$ پردازنده از نوع $\partial\xi$، ∂G_k، ∂H_l، G_k و H_l، $3mn+3n+4$ انتگرال‌گیر و $mn(2mn+3n+21)+n^2+13n+8$ اتصال درونی است.

قضیه ۲ ([۱۰]). فرض کنید $(w^*,Y^*,\gamma^*,\beta^*)$ به ازای $\varepsilon \to 0^+$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۹) باشد و فرض کنیم:

(۱) w^* نقطه منظم مسأله (۷) باشد.

(۲) برای هر $z \in Z = \left\{ z \mid \nabla H_l(w^*)z = 0,\ \forall l,\ \nabla G_k(w^*)z = 0,\ \forall k \in K \right\}$ داشته باشیم:

$$z^T \nabla^2_{ww} L(w^*,Y^*,\gamma^*,\beta^*) z > 0$$

آنگاه نقطه تعادل شبکه عصبی (۹) مسأله (۷) و نیز مسأله دوسطحی (۳) را حل می‌کند.

قضیه ۳ ([۱۰]). فرض کنید $(w^*,Y^*,\gamma^*,\beta^*)$ به ازای $\varepsilon \to 0^+$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۹) باشد به طوری که ماتریس هسین $\nabla^2_{ww} L(w^*,Y^*,\gamma^*,\beta^*)$ معین مثبت باشد. فرض کنید که w^* نقطه منظم مسأله‌ی (۷) باشد و شرط

[1] Processors
[2] Integrators
[3] Interconnections

مکمل قوی $\beta_k^* > 0$ به ازای $k \in K$ برقرار باشـد. آنگـاه $(w^*, Y^*, \gamma^*, \beta^*)$ یـک نقطه پایدار مجانبی[1] شبکه عصبی (۹) است.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این بخش دو سناریو برای بازی مهاجم-مدافع چند هدفی با محدودیت تخصیص بودجه ارائه خواهد شد تا کارایی مدل دوسطحی معرفی شده (۳) در شبیه سازی این سناریوها و توانایی مدل شبکه عصبی معرفی شده (۹) در حل آن را نمایش دهند. شبیه‌سازی این سناریوها با استفاده از نرم افزار MATLAB و حل کننده معادلات دیفرانسیل معمولی ode45 انجام شده است.

سناریوی اول: در اینجا دو شهر A و B را به عنوان اهداف در نظر می‌گیریم پس $n=2$ است. سه نوع حمله متفاوت به ترتیب به صورت حمله مسلحانه، ترور و بمب گذاری نیز مفروض است پس $m=3$ می‌باشد. جدول ۲ مقادیر اثربخشی هزینه (C_{ij}) برای انواع مختلف حمله و شهرهای A و B را نمایش می‌دهد.

جدول ۲. مقادیر اثربخشی هزینه (C_{ij}) در سناریوی اول

	حمله مسلحانه	ترور	بمب گذاری
شهر A	0.012	0.061	0.039
شهر B	0.010	0.025	0.040

کل بودجه پدافندی برابر $B=300$ میلیارد تومان و احتمال کل حملات برابر $R=1$ است. همچنین جدول ۳ مقادیر خسارت مالی وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j (D_{ij}) را برحسب میلیارد تومان نمایش می‌دهد.

[1] Asymptotically stable point

حال مدل دوسطحی (۳) را برای شبیه‌سازی بازی مهاجم-مدافع چند هدفی با محدودیت تخصیص بودجه به کار می‌گیریم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\text{(UP)}\quad & \min_{b}\ 10r_{11}\,\mathrm{e}^{-0.012b_1}+80r_{12}\,\mathrm{e}^{-0.061b_1}+50r_{13}\,\mathrm{e}^{-0.039b_1}+9r_{21}\,\mathrm{e}^{-0.01b_2} \\
& \qquad +35r_{22}\,\mathrm{e}^{-0.025b_2}+51r_{23}\,\mathrm{e}^{-0.04b_2} \\
& \text{s.t.}\quad b_1+b_2=300, \\
& \qquad\quad b_1,b_2\ge 0, \\
\text{(LP)}\quad & \max_{r}\ 10r_{11}\,\mathrm{e}^{-0.012b_1}+80r_{12}\,\mathrm{e}^{-0.061b_1}+50r_{13}\,\mathrm{e}^{-0.039b_1}+9r_{21}\,\mathrm{e}^{-0.01b_2} \\
& \qquad +35r_{22}\,\mathrm{e}^{-0.025b_2}+51r_{23}\,\mathrm{e}^{-0.04b_2} \\
& \text{s.t.}\quad r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{21}+r_{22}+r_{23}=1, \\
& \qquad\quad r_{i,j}\ge 0,\ \ \forall i=1,2,\ \ \forall j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

جدول ۳. مقادیر خسارت مالی وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j (D_{ij}) در سناریوی اول

	حمله مسلحانه	ترور	بمب گذاری
شهر A	10	80	50
شهر B	9	35	51

از شبکه عصبی (۹) برای حل این مسأله دو سطحی استفاده می‌کنیم. منحنی‌های خروجی دستگاه (۹) به جواب بهینه مسأله دوسطحی همگرا هستند. جواب بهینه در جدول ۴ نمایش داده شده است.

جدول ۴. جواب‌های بهینه در سناریوی اول.

b_1^*	b_2^*	r_{11}^*	r_{12}^*	r_{13}^*	r_{21}^*	r_{22}^*	r_{23}^*
141.153	158.847	0.477	0	0	0.523	0	0

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد بودجه‌ی پدافندی که باید به دو شهر A و B تخصیص یابد به ترتیب 141.153 و 158.847 میلیارد تومان است. احتمال آن که مهاجم حمله نوع 1 به شهر A را انجام دهد 0.477 و احتمال آن که مهاجم حمله نوع 1 به شهر B را انجام دهد 0.523 است و بقیه احتمالات صفر است. خسارت مورد انتظار یا مقدار بهینه نیز برابر با 1.838 میلیارد تومان به دست می‌آید.

سناریوی دوم: در این سناریو چهار شهر A، B، C، D به عنوان اهداف در نظر گرفته می‌شوند بنابراین $n=4$ است. فرض می‌کنیم مهاجم دو نوع حمله بمب گذاری و حمله به تأسیسات و زیر ساخت‌ها را برنامه‌ریزی کرده باشد لذا $m=2$ می‌باشد. مقادیر اثربخشی هزینه (C_{ij}) برای انواع مختلف حمله و چهار شهر در جدول ۵ نشان داده شده‌اند.
کل بودجه پدافندی هم مانند سناریوی قبل برابر با $B=300$ میلیارد تومان تعیین شده و احتمال کل حملات برابر $R=1$ است. همچنین جدول ۶ مقادیر خسارت مالی وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j (D_{ij}) را برحسب میلیارد تومان نمایش می‌دهد.
با استفاده از مدل دوسطحی (۳) بازی مهاجم-مدافع چند هدفی با محدودیت تخصیص بودجه را به صورت زیر فرمول بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\text{(UP)} \quad \min_{b} \quad & 10r_{11}\,\mathrm{e}^{-0.015b_1} + 35r_{12}\,\mathrm{e}^{-0.071b_1} + 50r_{21}\,\mathrm{e}^{-0.06b_2} + 21r_{22}\,\mathrm{e}^{-0.025b_2} + 25r_{31}\,\mathrm{e}^{-0.02b_3} \\
& + 15r_{32}\,\mathrm{e}^{-0.012b_3} + 15r_{41}\,\mathrm{e}^{-0.018b_4} + 20r_{42}\,\mathrm{e}^{-0.043b_4} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{4} b_i = 300, \\
& b_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(LP)} \quad \max_{r} \quad & 10r_{11}\,\mathrm{e}^{-0.015b_1} + 35r_{12}\,\mathrm{e}^{-0.071b_1} + 50r_{21}\,\mathrm{e}^{-0.06b_2} + 21r_{22}\,\mathrm{e}^{-0.025b_2} + 25r_{31}\,\mathrm{e}^{-0.02b_3} \\
& + 15r_{32}\,\mathrm{e}^{-0.012b_3} + 15r_{41}\,\mathrm{e}^{-0.018b_4} + 20r_{42}\,\mathrm{e}^{-0.043b_4} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} r_{i,j} = 1, \\
& r_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1,2, \quad \forall j = 1,2,3.
\end{aligned}$$

جدول ۵. مقادیر اثربخشی هزینه (C_{ij}) در سناریوی دوم

	بمب گذاری	حمله به تأسیسات و زیرساخت‌ها
شهر A	0.071	0.015
شهر B	0.025	0.060
شهر C	0.012	0.020
شهر D	0.043	0.018

جدول ۶. مقادیر خسارت مالی وارد شده به هدف i با استفاده از حمله نوع j (D_{ij}) در سناریوی دوم

	بمب گذاری	حمله به تأسیسات و زیرساخت‌ها
شهر A	35	10
شهر B	21	50
شهر C	15	25
شهر D	20	15

از شبکه عصبی (۹) برای حل این مسأله دو سطحی استفاده می‌کنیم. منحنی‌های خروجی دستگاه (۹) به جواب بهینه مسأله دوسطحی همگرا هستند. جواب بهینه در جدول ۷ نمایش داده شده است:

جدول ۷. جواب‌های بهینه در سناریوی دوم

b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	r_{11}^*	r_{12}^*	r_{21}^*	r_{22}^*	r_{31}^*	r_{32}^*	r_{41}^*	r_{42}^*
175.625	113.093	11.244	0.038	0	0	0	0	0	0.003	0.997	0

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد بودجه‌ی پدافندی که باید به شهرهای A، B، C و D تخصیص یابد به ترتیب 175.625، 113.093، 11.244 و 0.038 میلیارد تومان است. احتمال آن که مهاجم حمله نوع ۲ به شهر C را انجام دهد 0.003 و احتمال آن که مهاجم حمله نوع ۱ به شهر D را انجام دهد 0.997 است و بقیه احتمالات صفر است. این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که مدافع نسبت بسیار زیادی از بودجه خود را به شهرهای A و B تخصیص داده است و محافظت از شهرهای C و D نسبتاً پایین است. خسارت مورد انتظار یا مقدار بهینه نیز برابر با 13.666 میلیارد تومان به دست می‌آید.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به مدلسازی بازی مهاجم-مدافع چندهدفی همراه با محدودیت تخصیص بودجه با استفاده بهینه‌سازی دوسطحی پرداخته شد. مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی با استفاده از شرایط بهینگی KKT و نظریه بهینه‌سازی به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی، نامحدب و ناهموار یک سطحی تبدیل شد. با استفاده از تابع فیشر-برمیستر اختلالاتی و نظریه دستگاه‌های دینامیکی یک مدل شبکه عصبی زمان پیوسته برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی دوسطحی معرفی شد. شبکه عصبی ارائه شده پایدار مجانبی و همگرا به جواب بهینه مسأله‌ی برنامه‌ریزی

دوسطحی معرفی شده است. از مزایای مدل شبکه عصبی معرفی شده می‌توان به ساختار ساده، توانایی حل مسائل با ابعاد بالا و پیاده سازی سخت افزاری قدرتمند آن اشاره کرد. همچنین با طراحی دو سناریو طراحی شد تا کارایی و عملکرد مدل دوسطحی و شبکه عصبی معرفی شده مورد بررسی گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند احتمال حمله‌ی مهاجم به هدف با بودجه دفاعی پایین بسیار بالاست. به عنوان پژوهش آتی، هدف آن است که علاوه بر محدودیت تخصیص بودجه برای مدافع، محدودیت تخصیص بودجه برای مهاجم نیز به مسأله اضافه گردد و بازی استکلبرگ را برای مدلسازی به کار گیریم.

مراجع

[1] M. N. Azaiez and V. M. Bier, “Optimal resource allocation for security in reliability فاعیsystems” European Journal of Operational Research, vol. 181, no. 2, pp. 773-786, 2007.

[2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, “Nonlinear programming: Theory and Algorithms” 3rd ed., Wiley, New York, 1993.

[3] V. M. Bier, N. Haphuriwat, J. Menoyo, R. Zimmerman, and A. Culpen, “Optimal resource allocation for defense of targets based on differing measures of attractiveness” Risk Analysis, vol. 28, no. 3, 763-770, 2008.

[4] G. Brown, M. Carlyle, J. Salmerón, and K. Wood, “Defending critical infrastructure” Interface, vol. 36, no 6, pp. 530-44, 2006.

[5] S. Dempe, “Foundation of Bilevel Programming” Kluwer Academic Publishers, London, 2002.

[6] S. Effati and M. Moghaddas, “A novel neural network based on NCP function for solving constrained nonconvex optimization problems” Complexity, vol. 21, no. 6, pp. 130-141, 2016.

[7] R. Eldor and R. Melnick, “Financial market and terrorism” European Journal of Political Economy, vol. 20, no. 2, pp. 367-386, 2004.

[8] P. Guan, M. He, J. Zhuang, and S. C. Hora, “Modeling a multitarget mttacker–defender game with budget constraints” Decision Analysis, vol. 14, no. 2, pp. 87-107, 2017.

[9] M. Kennedy and L. Chua, “Neural networks for nonlinear programming” IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 35, no. 5, pp. 554-562, 1988.

[10] Y. Lv, T, Hu, G. Wang, and Z. Wan, “A neural network approach for solving nonlinear bilevel programming problem” Computers and Mathematics with Applications, vol. 55, pp. 2823-2829, 2008.

[11] M. Moghaddas and G. Tohidi, “A neurodynamic scheme to bi-level revenue-based centralized resource allocation models” Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 37, no. 2, pp. 2741-2756, 2019.

[12] M. Moghaddas and G. Tohidi, “An efficient neurodynamic model to solve nonconvex nonlinear optimization problems and its applications” Expert Systems, vol. 37, 2020, doi:10.1111/exsy.12498.

[13] M. Ouyang, M. Xu, C. Zhang and S. Huang, “Mitigating electric power system vulnerability to worst-case spatially localized attacks” Reliability Engineering & System Safety, vol. 165, pp. 144–154, 2017.

[14] P. J. Phillips, “Applying modern portfolio theory to the analysis of terrorism: computing the set of attack method combinations from which the rational terrorist group will choose in order to maximise injuries and fatalities” Defence Peace Economics, vol. 20, no. 3, pp. 193–213, 2009.

[15] X. Shan and J. Zhuang, “Cost of equity in homeland security resource allocation in the

[16] face of a strategic attacker” Risk Analysis, vol. 33, no. 6, pp. 1083-1099, 2013.

[17] D. Tank and J. J. Hopfield, “Simple ’neural’ optimization networks: An a/d converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit” IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 33, no. 5, pp. 533-541, 1986.

[18] C. Wang and V. M. Bier, “Target-hardening decisions based on uncertain multiattribute terrorist utility” Decision Analysis, Vol. 8, no. 4, pp. 286-302, 2011.

[19] Y. Xia and J. Wang, “A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 51, no. 7, pp. 1385-1394, 2004.

[20] Y. Xia and J. Wang, “A recurrent neural network for solving nonlinear convex programs subject to linear constraints” IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 16, no. 2, pp. 379-386, 2005.

[21] Z. Xu and J. Zhuang, “A study on a sequential one-defender-n-attacker game” Risk Analysis, vol. 39, pp. 1414-1432, 2019.

[22] X. Xue and W. Bian, “A project neural network for solving degenerate convex quadratic program” Neurocomputing, vol. 70, pp. 2449–2459, 2007.