دوفصلنامه بازی جنگ، سال دوم، شماره ۵، پاییز و زمستان ۱۳۹۸

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۷/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۱۴

از صفحه ۳۹ تا صفحه ۵۴

مکانیابی تجهیزات جنگی در خط مقدم: مدل و روش حل

جواد طیبی[۱*]، ابومسلم محمدی[۲]

استادیار گروه مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی بیرجند[۱]

Email: javadtayyebi@birjandut.ac.ir@gmail.com

عضوهیات علمی دانشگاه امام علی (ع) [۲]

چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی نحوه‌ی موقعیت یابی تجهیزات جنگی در خط مقدم می‌پردازیم. در این مسأله هدف تعیین موقعیت مکانی تجهیزات جنگی است به گونه‌ای که تمام نقاط حساس دشمن پوشش داده شده و ضمنا کمترین تعداد تجهیزات ممکن برای این کار استفاده گردد. این مسأله را مدل‌بندی کرده و در دو حالت آن را بررسی می‌کنیم. در موردی که هدف تعیین موقعیت یک نوع تجهیزات جنگی باشد، نشان داده می‌شود که مسأله تبدیل به یک مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان در یک شبکه‌ی کمکی شده و در نتیجه می‌توان آن را در زمان چندجمله‌ای حل کرد. اما در حالتی که انواع تجهیزات مورد استفاده قرار گیرند ثابت می‌گردد که مسأله NP-سخت است. پس در این حالت نمی‌توان مسأله را به طور کارا حل کرد.

واژگان کلیدی: مسایل موقعیت‌یابی، مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان، مسایل NP-سخت، تجهیزات جنگی، خط مقدم

---

* نویسنده مسئول

۱- مقدمه

امروزه مدل‌سازی مسایل جهان واقعی به مسایل ریاضی، روش علمی مناسبی برای رویارویی با پدیده‌های طبیعی است [۲]. از آن جمله می‌توان به مدل‌سازی بیماری‌های مختلفی همچون ایدز اشاره کرد [۵]. مدل‌سازی مسایل نه تنها در حوزه‌ی پزشکی بلکه در حوزه‌های مهندسی، اقتصاد، مدیریت و تصمیم‌گیری وارد شده است. تا آن‌جا که بسیاری از موسسات، کارخانجات، ارگان‌ها و سازمان‌ها در کشورهای مختلف برای انجام تصمیم‌گیری‌های خود از دکترین تحقیق در عملیات استفاده می‌کنند. تحقیق در عملیات یکی از گرایش‌های رشته‌ی ریاضیات کاربردی است که به تشریح روش‌های ریاضی برای انجام تصمیم‌گیری بهینه می‌پردازد که از روش‌های مرسوم در این زمینه می‌توان به روش سیمپلکس[1] [۳]، روش تحلیل سلسله مراتبی[2] [۷] و روش تاپسیس[3] [۶] اشاره کرد.

قابل توجه است که اصطلاح تحقیق در عملیات ابتدا تحت عنوان یک پروژه به نام «تحقیق در عملیات جنگی» مطرح شد. در طی جنگ جهانی دوم مشخص شد که استفاده‌ی مناسب و بهینه از منابع موجود (تجهیزات جنگی موجود) درجه اهمیت زیادی دارد. از این رو یک تیم نیروی هوایی ایالات متحده به سرپرستی جورج دانتزیک[4] پروژه‌ی تحقیق در عملیات جنگی را در سال ۱۹۴۷ میلادی آغاز کردند و در همان سال روش مشهور سیمپلکس توسط آن‌ها ابداع شد. پس از ابداع این روش، علاقه به تحقیق در عملیات به سرعت در بین دانشمندان رشته‌های مختلف از جمله ریاضی، اقتصاد، مدیریت و مهندسی صنایع رواج پیدا کرد. امروزه نیز کاربرد تحقیق در عملیات در پروژه‌های نظامی قابل توجه است. استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها [۸و۴] و بهینه‌سازی ترکیبیاتی [۱۰و۹] در تعیین راهبرد بهینه نمونه‌هایی از این کاربردها را نشان می‌دهد.

در این مقاله به مطالعه‌ی مسأله‌ی موقعیت‌یابی تجهیزات جنگی در خط مقدم می‌پردازیم. این مسأله را می‌توان در دسته‌ی به خصوصی از مسایل بهینه‌سازی ترکیبیاتی که به مسایل موقعیت‌یابی شهرت دارند، قرار داد. در این مقاله در حالتی که فقط بخواهیم موقعیت یک نوع تجهیزات را مشخص کنیم، مسأله را تبدیل به یک مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان کرده و در نتیجه آن را در زمان چند جمله‌ای حل می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم در حالتی که بخواهیم از چندین نوع تجهیزات استفاده کنیم مسأله NP-سخت بوده و در نتیجه نمی‌توان مسأله را در زمان چندجمله‌ای حل کرد. در هر حالت برای تشریح بیشتر، نتایج به دست آمده را بر مثال‌های فرضی اجرا خواهیم کرد.

---

[1] Simplex
[2] AHP method
[3] Topsis method
[4] George Dantzig

اجازه دهید اکنون به بیان مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان بپردازیم. یک گراف جهت‌دار $G(V,E)$ را در نظر بگیرید که V نشان دهنده‌ی مجموعه رئوس گراف و E نشان دهنده‌ی مجموعه یال‌های آن است. به هر راس $i \in V$ مقدار عرضه یا تقاضای b_i را نسبت می‌دهیم. اگر $b_i > 0$ راس را یک راس منبع و اگر $b_i < 0$ راس را یک راس مقصد گوییم و در حالتی که $b_i = 0$ راس i را یک راس واسطه (میانی) نامیم. به هر یال $(i,j) \in E$ دو عدد u_{ij} و c_{ij} را نسبت می‌دهیم که u_{ij} ظرفیت یال را نشان داده و c_{ij} هزینه‌ی ارسال یک واحد جریان بر این یال را نشان می‌دهد. هدف فرستادن جریان از رئوس منبع به رئوس مقصد بر گراف $G(V,E)$ است به طوری‌که تقاضای رئوس مقصد بر آورده شده، از هر یال بیش از ظرفیتش جریان عبور نکرده و هزینه‌ی ارسال جریان کمینه شود. با این فرض که مجموع عرضه برابر مجموعه تقاضاست می‌توان مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}\,,$$
$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = b_i \quad i \in V,$$
$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad (i,j) \in E,$$

که در آن x_{ij} مقدار جریانی است که بایستی بر یال (i,j) ارسال کرد. توجه کنید که هر متغیر x_{ij} یک بار با ضریب $+1$ در محدودیت iام و یک بار با ضریب -1 در محدودیت jام ظاهر می‌شود. بنابراین چنانچه ماتریس ضرایب محدودیت‌های مسأله را بنویسیم هر ستون آن دقیقا شامل یک $+1$ و یک -1 بوده و سایر درایه‌های آن برابر صفرند. خوشبختانه می‌توان این مسأله را به چندین روش در زمان چندجمله‌ای حل کرد [۱].

.

۲. تعریف مسأله و مدل ریاضی

در مسأله‌ی مورد مطالعه هدف تعیین موقعیت مکانی تجهیزات جنگی در خط مقدم است به طوری که بتوان هر یک از نقاط استقرار تجهیزات دشمن را پوشش داده و برای این کار از حداقل نیروی ممکن استفاده کرد. برای مدل بندی مسأله به ذکر جزییات آن می‌پردازیم.

فرض کنید که با استفاده از عکس‌های هوایی یا ماهواره‌ای وضعیت استقرار تجهیزات سنگین دشمن را در خط مقدم می‌دانیم. چنانچه خط دشمن را به عنوان یک خط راست در نظر بگیریم می‌توانیم این نقاط را از ابتدا تا انتهای خط با $1,2,\ldots,m$ شماره‌گذاری کنیم. فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی M شامل این نقاط باشد، به عبارت دیگر، $M=\{1,2,\ldots,m\}$. توجه داریم که با این شیوه‌ی اندیس گذاری نقطه $i\in M$ از نظر موقعیت جغرافیایی مجاور با نقاط $i\pm 1$ است. به هر نقطه‌ی $i\in M$ یک عدد $b_i\geq 0$ وابسته است که نشان دهنده‌ی میزان سنگینی آتش مورد نیاز برای انهدام نقطه‌ی i و یا جلوگیری از پیشرفت دشمن از این نقطه است. به عنوان مثال اگر در نقطه‌ی i یک تانک قرار داشته باشد مسلما میزان آتش تحمیل شده برای انهدام آن متفاوت با زمانی خواهد بود که در این نقطه یک گروه پیاده نظام از دشمن قرار دارد.

اکنون به بحث در مورد نحوه‌ی استقرار تجهیزات در خط خودی می‌پردازیم. فرض کنید که نقاط بالقوه برای استقرار تجهیزات را به صورت $1,2,3,\ldots,n$ شماره‌گذاری می‌کنیم و مجموعه‌ی شامل این نقاط را با نماد $N=\{1,2\ldots,n\}$ نمایش می‌دهیم. همانند فرض بیان شده در خط دشمن، در خط خودی نیز فرض می‌کنیم که نقاط مجاور هر نقطه‌ی $j\in N$ نقاط $j\pm 1$ باشند. برای هر نقطه‌ی $j\in N$ تجهیزاتی را که می‌توان در آن نقطه مستقر کرد، در نظر بگیرید. نوع این تجهیزات را می‌توانیم بر اساس موقعیت جغرافیایی نقطه، تعداد تجهیزات موجود و عوامل موثر دیگر تعیین کنیم. این تجهیزات شامل سه مشخصه می‌باشند. اول این که با استقرار آنها چه مساحتی از خط دشمن زیر آتش قرار می‌گیرد. دوم این که میزان سنگینی آتش تولید شده توسط این تجهیزات چقدر خواهد بود که این میزان را با نماد $a_j\geq 0$ نمایش می‌دهیم. سوم این که استقرار این تجهیزات چقدر هزینه بر خواهد بود که مقدار آن را با نماد $w_j\geq 0$ نشان می‌دهیم. توجه داریم که منظور از هزینه لزوما فقط قیمت ریالی تجهیزات نیست، بلکه ممکن است منظور هزینه‌ی حمل تجهیزات به نقطه‌ی مورد نظر باشد. پس می‌توان مسأله‌ی نحوه‌ی استقرار تجهیزات جنگی را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\min z = \sum_{j \in N} w_j x_j, \tag{۱.الف}$$

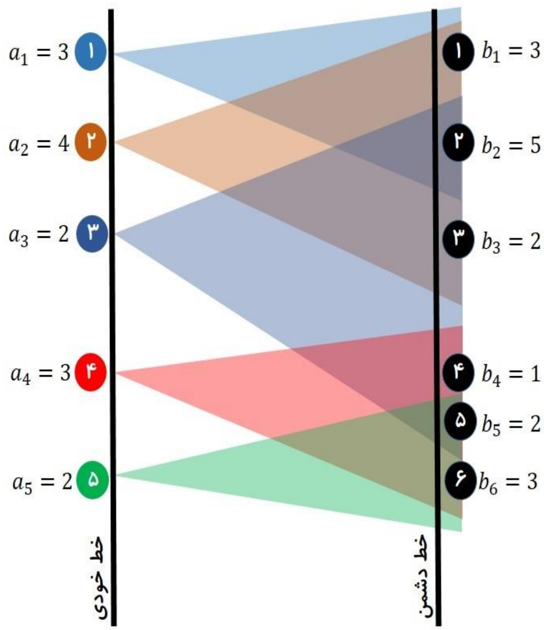
$$\sum_{j \in N_i} a_j x_j \geq b_i \quad i \in M, \tag{۱.ب}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j \in N, \tag{۱.ج}$$

که در آن N_i نشان دهنده‌ی مجموعه‌ای از نقاط خط مقدم خودی است که می‌توانند با تجهیزات مستقر در خود نقطه‌ی i دشمن را هدف قرار دهند. متغیر x_j یک متغیر صفر و یک است و $x_j = 1$ بدان معناست که بایستی تجهیزات را در نقطه‌ی j مستقر کرد. به ازای هر نقطه‌ی $i \in M$ از خط دشمن محدودیت (۱.ب) بیان می‌کند که سنگینی آتش در این نقطه حداقل باید برابر b_i باشد و تابع هدف (۱.الف) هزینه‌ی کل تجهیزات را کمینه می‌کند. مسأله‌ی (۱) یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی صفر و یک است که می‌توان برای حل آن از روش‌های شاخه و کران، روش جمعی بالاس، روش‌های صفحات برشی و روش‌های شاخه و برش استفاده کرد. در بدترین شرایط همه‌ی این روش‌ها دارای پیچیدگی نمایی هستند و با بزرگ کردن اندازه‌ی مسأله زمان قابل توجهی برای حل مسأله توسط آن‌ها نیاز داریم که با توجه به حیاتی بودن زمان در نحوه‌ی استقرار برای مقابله‌ی مناسب با دشمن این روش‌ها چندان کارا نخواهند بود.

پس یک سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان این مسأله را در یک زمان کارا (چندجمله‌ای) حل کرد یا خیر؟ در ادامه‌ی این بخش نشان می‌دهیم که حتی اگر تعداد نقاط دشمن فقط یک نقطه باشد (به بیان دیگر اگر مجموعه‌ی M تک عضوی باشد)، مسأله‌ی (۱) در زمان چندجمله‌ای قابل حل نخواهد بود. در بخش بعد نشان خواهیم داد که اگر بخواهیم نحوه‌ی استقرار فقط یک نوع تجهیزات جنگی را مشخص کنیم این کار را می‌توان در زمان چندجمله‌ای انجام داد. اجازه دهید قبل از بیان رسمی این نتایج به تشریح یک مثال از مسأله‌ی (۱) بپردازیم.

مثال ۱. شکل ۱ یک نمونه خط مقدم فرضی را نشان می‌دهد که در آن خط سمت چپ خط خودی و خط سمت راست خط دشمن است. نقاط سیاه نشان داده شده در خط دشمن مکان استقرار نیروهای دشمن را نشان می‌دهد که با شماره‌های $1,2,\ldots,6$ شماره گذاری شده‌اند برای هر یک از این نقاط مقدار سنگینی آتش b_i برای انهدام نقطه مشخص شده است. نقاط رنگی سمت چپ نقاط بالقوه برای استقرار نیروهای خودی را نشان می‌دهد که با شماره‌های $1,2,\ldots,5$ شماره‌گذاری شده‌اند. برای هر نقطه‌ی j مقدار سنگینی آتش تولید شده از این نقطه (a_j) مشخص شده است و برای سادگی فرض شده است که هزینه‌ی تجهیزات در هر نقطه برابر یک است. همچنین طول پوشش داده شده از خط مقدم دشمن توسط هر نقطه‌ی j در شکل نشان داده شده است. به عنوان مثال از نقطه‌ی ۱ فقط می‌توان نقاط ۱ و ۲ دشمن را هدف گرفت، در حالی که از نقطه‌ی ۳ می‌توان هر یک از نقاط $2,3,4,5$ را مورد اصابت قرار داد. با توجه به این بحث می‌توان نقطه‌ی ۱ از خط دشمن را توسط هر یک از نقاط خودی $1,2,3$ هدف گرفت. پس $N_1=\{1,2,3\}$. به طور مشابه برای سایر نقاط دشمن داریم:



شکل ۱. نمونه‌ای از مسأله‌ی (۱)

$$N_2=\{1,2,3\}, N_3=\{2,3\}, N_4=\{3,4\}, N_5=\{3,4,5\}, N_6=\{4,5\}.$$

با این توضیحات مسأله‌ی (۱) برای این مثال به صورت زیر است:

$$\min z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\,,$$
$$3x_1+4x_2\geq 3,$$
$$3x_1+4x_2+2x_3\geq 5,$$
$$4x_2+2x_3\geq 2,$$

$$
\begin{aligned}
&2x_3 + 3x_4 \geq 1,\\
&2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \geq 2,\\
&3x_4 + 2x_5 \geq 3,\\
&x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3,4,5.
\end{aligned}
$$

این مسأله را چنان چه با یکی از روش‌های مذکور حل کنیم به جواب بهینه‌ی $x_1 = x_5 = 0$ و $\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_4 = 1$ می‌رسیم که نشان می‌دهد باید در نقاط $2,3,4$ نیروها را مستقر کرد. بنابراین برای پوشش مورد نیاز فقط کافی است در سه نقطه از پنج نقطه‌ی مورد نظر نیروها را مستقر کرد.

یکی از مشکلاتی که شاید در نحوه‌ی مدل سازی این مسأله به ذهن آید این است که چگونه می‌توان برای یک نقطه‌ی خودی $j \in N$ تجهیزاتی را که می‌توان در آن نقطه مستقر کرد، در نظر گرفت. همین طور که قبلا بیان کردیم، نوع این تجهیزات را می‌توان بر اساس موقعیت جغرافیایی نقطه، تعداد تجهیزات موجود و عوامل دیگر تعیین کرد. با این وجود اگر برای یک نقطه نتوان یک نوع واحد از تجهیزات را تعیین کرد می‌توان تمامی حالات کلی را برای این نقطه در نظر گرفته و برای هر حالت یک متغیر تصمیم جدید در مسأله معرفی کرد.

حال می‌خواهیم در مورد پیچیدگی حل این مسأله بحث کنیم. ابتدا به تشریح مسأله‌ی کوله پشتی می‌پردازیم. در این مسأله یک مجموعه کالا موجود است که با شماره‌های $1,2,\ldots,n$ شماره‌گذاری شده‌اند. هر کالای i دارای سود (مزیت) p_i و وزن v_i است. می‌خواهیم برخی از این کالاها را درون یک کوله‌پشتی با ظرفیت وزنی V قرار دهیم به طوری که کالاهایی با بیشترین سود انتخاب شده و بیشتر از ظرفیت کوله‌پشتی در آن کالا قرار نگیرد. این مسأله را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max z = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n,\\
&v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n \leq V,\\
&x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۲}
$$

این مسأله یکی از مسایل NP-سخت است. تاکنون برای هیچ مسأله NP-سختی الگوریتم زمان چندجمله‌ای ارایه شده است. همچنین هیچ اثباتی که عدم وجود الگوریتم زمان چندجمله‌ای را ارایه دهد، نیز وجود ندارد. این مبحث یکی از مهم‌ترین سوالات باز مطرح شده در حوزه‌ی علوم کامپیوتر است. با توجه به این توضیحات اگر نشان دهیم که مسأله‌ی کوله‌پشتی یک نوع خاص از مسأله‌ی (۱) است، نتیجه می‌گیریم که مسأله‌ی (۱) حداقل باید به سختی مسأله کوله‌پشتی باشد و در نتیجه آن هم

یک مسألهی NP-سخت است. پس نمیتوان امیدی برای حل مسألهی (۱) در زمان چند جملهای داشت.

برای اینکه نشان دهیم مسألهی (۱) یک نوع خاص از مسألهی کولهپشتی است کافی است به ازای هر $j \in \{1,2 \ldots, n\}$ از تغییر متغیر $x_j' = 1 - x_j$ استفاده کنیم با این کار مسألهی (۲) را میتوان به یک مسأله به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} &\min z = p_1x'_1 + p_2x'_2 + \cdots + p_nx'_n\,, \\ &v_1x'_1 + v_2x'_2 + \cdots + v_nx'_n \geq \sum_{i=1}^{n} v_i - V, \\ &x'_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

این مسأله یک حالت خاص از مسألهی (۱) با فقط یک نقطه در خط دشمن با $b_1 = \sum_{i=1}^{n} v_i - V$ و n نقطه در خط خودی است که به ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $a_j = v_j$ و $w_j = p_j$ است. پس نتیجهی زیر را ثابت کردهایم.

قضیه ۱. مسألهی (۱) یک مسألهی NP-سخت است.

۱. مسأله با یک نوع تجهیزات

تاکنون دیدیم که نمیتوان مسألهی (۱) را حتی هنگامی که فقط یک نقطه در خط دشمن داشته باشیم در زمان چند جملهای حل کنیم و نیاز است که به روشهای شمارش ضمنی نظیر روش جمعی بالاس روی آوریم. با این وجود این روشها هنگامیکه تعداد نقاط خودی (یا دشمن) زیاد باشد حتی برای ابرکامپیوترها نیز وقت گیر خواهد بود. از این رو ارزشمند است حالات خاصی را از مسأله بررسی کنیم که بتوان آن را در زمان چندجملهای حل کرد.

در این بخش به بررسی حالت خاصی از مسألهی (۱) میپردازیم که فقط از یک نوع تجهیزات استفاده شود. نشان خواهیم داد که در این حالت خاص میتوان مسأله را به یک مسألهی کمترین هزینهی جریان تعریف شده بر یک شبکهی کمکی تبدیل کرد و در نتیجه میتوان مسأله را در زمان چندجملهای حل کرد.

مسألهی (۱) را در حالتی در نظر بگیرید که میخواهیم یک نوع تجهیزات را در نقاط خودی مستقر کنیم . میتوان در این حالت خاص مسألهی (۱) را به شکل زیر نوشت:

$$\min z = \sum_{j \in N} w_j x_j, \tag{4.الف}$$

$$\sum_{j \in N_i} a x_j \geq b_i \quad i \in M, \tag{4.ب}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j \in N, \tag{4.ج}$$

با مقایسه‌ی این مسأله با مسأله‌ی (۱) در می‌یابیم که تنها ضرایب x_j در محدودیت‌های (۱.ب) از a_j به مقدار ثابت $a > 0$ تغییر کرده است. دلیل این تغییر این است که به خاطر استفاده از یک نوع تجهیزات، میزان سنگینی آتش در هر نقطه‌ی خودی یکسان خواهد بود. البته شاید گمان شود که به طور مشابه می‌توانیم ضرایب تابع هدف (۴.الف) را برابر فرض کنیم. اما از آن‌جا که این ضرایب، هزینه‌هایی وابسته به حمل تجهیزات به هر نقطه هستند پس این هزینه‌ها به موقعیت مکانی هر نقطه وابسته بوده و در نتیجه در حالت کلی ثابت نخواهند بود. نکته‌ی قابل توجه دیگر این است که طول پوشش داده شده از خط دشمن توسط هر نقطه‌ی خودی برابر است اما از آنجا که نقاط استقرار نیروهای خودی و دشمن یکنواخت نیست نمی‌توان ادعا کرد که تعداد عناصر هر مجموعه‌ی N_i برابر است. البته در حالت بسیار خاصی که توزیع نیروهای خودی و دشمن یکنواخت باشند، این ادعا صحت دارد.

$$\min z = \sum_{j \in N} w_j x_j, \tag{5.الف}$$

$$\sum_{j \in N_i} x_j - s_i = b'_i \quad i \in M, \tag{5.ب}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j \in N, \tag{5.ج}$$

$$s_i \geq 0 \qquad i \in M, \tag{5.د}$$

با تقسیم طرفین محدودیت (۴.ب) بر a و تبدیل آن به شکل تساوی خواهیم داشت:

که به ازای هر i، $b_i' = \frac{b_i}{a}$ و متغیر کمکی نامنفی s_i نشان دهنده‌ی مقدار کمبود سمت چپ نسبت به سمت راست نامساوی (۴.ب) است. می‌توان مسأله‌ی (۵) را در شکل ماتریسی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min z = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}, \qquad \text{(۶.الف)}$$

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}', \qquad \text{(۶.ب)}$$

$$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}, \qquad \text{(۶.ج)}$$

که در آن $A \in R^{m\times(n+m)}$ ماتریس ضرایب محدودیت‌های (۵.ب)، $\boldsymbol{w} = [w_1, \dots, w_n]^T \in R^n$، $\boldsymbol{b}' = [b_1', \dots, b_m']^T \in R^m$، $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \{0,1\}^n$ و $\boldsymbol{s} = [s_1, \dots, s_m]^T \in R^m$.

لم ۲. ماتریس ضرایب A فقط شامل عناصر صفر و ± 1 است و درایه‌های غیر صفر هر ستون از ماتریس متوالی‌اند.

اثبات. فرض کنید ستون iام ماتریس A را با a_j نمایش دهیم. با توجه به ساختار مسأله به وضوح عناصر هر a_j فقط شامل صفر و ± 1 است. به ازای هر $j = n+1, \dots, n+m$، حکم واضح است زیرا ستون a_j شامل یک درایه‌ی -1 در مکان $(j-n)$ام بوده و بقیه‌ی درایه‌های بردار صفرند. به ازای $j = 1, \dots, n$، هر ستون دارای چندین درایه‌ی $+1$ است. از آن‌جا که برد هر نقطه‌ی خودی به دلیل یکسان بودن تجهیزات برابر است، نقاط خودی که هر نقطه از خط دشمن را پوشش می‌دهند طبق ترتیب داده شده متوالی هستند. این خاصیت نتیجه می‌دهد که به ازای $j = 1, \dots, n$، لزوما یک‌های هر ستون a_j نیز متوالی خواهد بود.

با استفاده از خاصیت بیان شده‌ی ماتریس ضرایب A در لم ۲ می‌توان مسأله‌ی (۶) را به یک مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان تبدیل کرد. برای این کار ابتدا محدودیت زاید $\boldsymbol{0}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = 0$ را به مسأله می‌افزاییم. با این کار یک سطر صفر به ماتریس A افزوده شده اما باز هم خاصیت توالی عناصر غیر صفر حفظ می‌شود. به علاوه یک درایه‌ی صفر به انتهای بردار اعداد سمت راست $\boldsymbol{b}'$ اضافه می‌گردد. از آن‌جا که این محدودیت زاید است جواب مسأله را تغییر نمی‌دهد. برای سادگی در نمادگذاری ماتریس ضرایب و بردار اعداد سمت راست جدید را با همان نمادهای A و $\boldsymbol{b}'$ نمایش می‌دهیم. حال محدودیت‌های مسأله‌ی (۵) را به محدودیت‌هایی هم ارز تبدیل می‌کنیم. برای این کار به ازای هر

$i \in M$ محدودیت iام را از محدودیت $i+1$ام کم می‌کنیم. بنابراین مسأله‌ی (۵) تبدیل به مسأله‌ی هم ارز زیر می‌شود:

$$\min z = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}, \tag{۶.الف}$$

$$\bar{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{b}}, \tag{۶.ب}$$

$$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}, \tag{۶.ج}$$

که با توجه به لم ۲ هر ستون از ماتریس $\bar{A}$ دقیقا شامل یک $+1$ و یک -1 است و بقیه‌ی درایه‌های آن ستون صفرند. بنابراین ماتریس $\bar{A}$ نشان دهنده‌ی ماتریس وقوع یک گراف مانند $G(V,E)$ است. این گراف به ازای هر محدودیت (۶.ب) دارای یک راس است. بنابراین مجموعه‌ی رئوس گراف برابر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ است که v_{m+1} راس متناظر با محدودیت زاید اضافه شده می‌باشد. به ازای هر متغیر از مسأله‌ی (۶) گراف شامل یک یال جهت‌دار می‌باشد. یال مربوط به متغیر x_j را با e_j نمایش می‌دهیم که راس ابتدایی آن همان راس با ضریب $+1$ در ستون jام ماتریس $\bar{A}$ و راس انتهایی آن راسی با ضریب -1 در آن ستون است. یال‌های مربوط به متغیرهای s_i را با e_i' نمایش می‌دهیم که راس ابتدایی و انتهایی آن به طور مشابه مشخص می‌گردد. بنابراین، مجموعه یال‌های گراف G برابر

$$E = \bigcup_{j \in N} e_j \cup \bigcup_{i \in M} e'_j$$

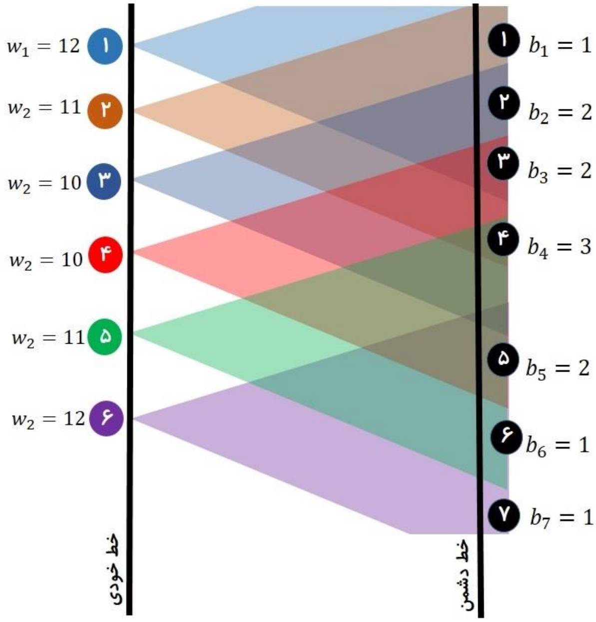
است. برای هر راس v_i شبکه مقدار عرضه و تقاضای $\bar{b}_i$ را تعریف می‌کنیم. برای هر یال e_j هزینه ارسال w_j و ظرفیت $+1$ و برای هر یال e_i' هزینه‌ی ارسال صفر و ظرفیت ارسال $+\infty$ را در نظر می‌گیریم. با این توضیحات مسأله‌ی (۶) یک نمونه از مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان تعریف شده بر گراف $G(V,E)$ خواهد بود. بنابراین نتیجه‌ی زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه۳. مسأله‌ی (۴) را می‌توان به یک مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان تبدیل کرد.

از آن‌جا که می‌توان مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان را با روش‌های زمان چندجمله‌ای حل کرد، بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۴. مسأله‌ی (۴) را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

مثال ۲. یک نمونه از مسأله‌ی (۴) در شکل مقابل داده شده است. در این مسأله فرض شده است که انبار تجهیزات بین نقاط ۳ و۴ از خط خودی قرار دارد. بنابراین هزینه‌ی حمل تجهیزات وابسته به فاصله‌ی آن‌ها تا انبار متفاوت در نظر گرفته شده است. توجه داریم به دلیل یکسان بودن نوع تجهیزات در مسأله‌ی (۴) میزان پوشش هر نقطه‌ی خودی از خط دشمن یکسان است. برای سادگی میزان آتش تولید شده توسط این نوع تجهیزات را برابر یک می‌گیریم. پس می‌توان مسأله‌ی (۴) را به صورت مسأله‌ی (۵) بازنویسی کرد که ماتریس ضرایب و بردار اعداد راست آن به شکل زیر است:

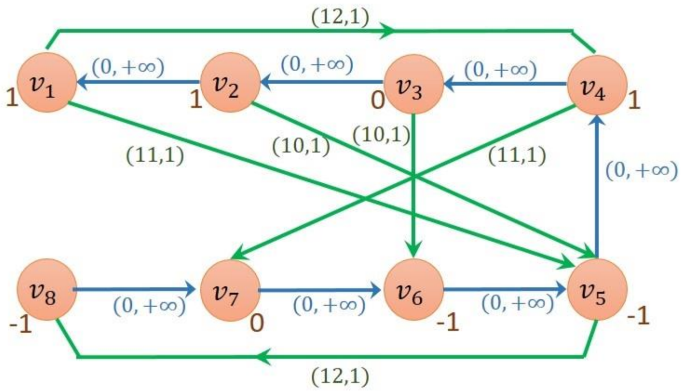


شکل ۲. یک نمونه از مسأله‌ی (۴)

$$A = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\boldsymbol{b}' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

همین طور که مشاهده می‌کنید درایه‌های ± 1 هر ستون از ماتریس A متوالی هستند (لم 2را ببینید). سطر آخر ماتریس A و درایه‌ی آخر بردار $\boldsymbol{b}'$ مربوط به محدودیت زاید $\mathbf{0}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = 0$ است. با کم کردن محدودیت iام از محدودیت $i+1$ام می‌توان مسأله‌ی (۶) را به دست آورد که ماتریس ضرایب و بردار سمت راست آن به شکل زیر است:



شکل ۳. گراف $G(V,E)$ مربوط به مثال 2.

$$\bar{A} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

شکل ۳ گراف $G(V,E)$ مربوط به مسأله را نشان می‌دهد. یال‌های سبز رنگ گراف مربوط به متغیرهای x_j و یال‌های آبی رنگ مربوط به متغیرهای کمکی s_i است. برای هر یال یک زوج مرتب در شکل مشخص شده است که مولفه‌ی اول آن هزینه و مولفه‌ی دوم ظرفیت یال را مشخص می‌کند. برای هر راس مقدار عرضه و تقاضای آن در شکل آمده است. برای حل این مسأله از زبان برنامه‌نویسی پایتون[۱] و از کتابخانه‌ی نتورک ایکس[۲] استفاده شده است که جواب بهینه‌ی آن به شرح زیر است:

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = s_3 = 1,$$
$$x_1 = x_5 = s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 0.$$

بنابراین بایستی تجهیزات را در نقاط 2,3,4,6 مستقر کنیم.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه‌ی مسأله‌ی موقعیت یابی تجهیزات جنگی در خط مقدم پرداخته شد. ثابت شد که این مسأله حتی با وجود یک نقطه در خط مقدم دشمن یک مسأله‌ی NP –سخت است. پس نمی‌توان به حل مسأله در زمان چندجمله‌ای امیدوار بود. در حالت خاصی که هدف نحوه‌ی استقرار یک نوع خاص از تجهیزات است، نشان داده شد که مسأله به یک نمونه از مسایل کمترین هزینه‌ی جریان

---

[1] Python
[2] NetworkX

تبدیل می‌شود و در نتیجه می‌توان این نمونه‌ی خاص را در زمان چندجمله‌ای حل کرد. این روش تبدیل را می‌توان برای حصول جواب‌های تقریبی از مسأله کلی (با تنوع تجهیزات) به کار برد. برای این کار کافی است تجهیزات را بر اساس انواع آن طبقه بندی کرده و برای هر نوع به خصوص یک‌بار مسأله‌ی کمترین هزینه‌ی جریان را حل کنیم. کیفیت جواب تقریبی به دست آمده و به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی دیگر را به مطالعات بعدی موکول می‌کنیم.

۴. قدردانی

این کار بخشی از پروژه‌ی جایگزین خدمت جواد طیبی با همکاری مهندس ابومسلم محمدی در دانشگاه افسری امام علی (ع) است. نویسندگان لازم می‌دانند که در این‌جا از زحمات و همکاری معاونت محترم پژوهشی دانشگاه و همکاران دیگر این حوزه تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

[1] Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993), "Network Flows". *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*.

[2] Aris R. (2012), "Mathematical Modelling Techniques". *New York, Dover Publication*.

[3] Bazaraa M.S., Jarvis J., Sherali H.D. (2011), "Linear programming and network flows". *John Wiley & Sons*.

[4] Haywood O.G. (1954), "Military Decision and Game Theory". *Journal of the Operations Research Society of America*, 2 (4) 365-385.

[5] Hussaini N., Winter M. (2010), "Qualitative assessment of the role of public health education program on HIV transmission dynamics". *Mathematical Medicine and Biology*, 28(3) 245-270.

[6] Hwang C.L., Yoon K. (1981), "Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications". *New York: Springer-Verlag*.

[7] Saaty T.L., Peniwati K. (2008), "Group Decision Making: Drawing out and Reconciling Differences". *Pittsburgh, Pennsylvania: RWS Publications*.

[8] Sandler T., Daniel G., Arce M. (2003), "Terrorism and Game Theory". Simulation & Gaming, 34 (3) 319-337.

[9] Wood R.K. (1993), "Deterministic Network Interdiction". *Mathematical Computation Modelling,* 17 (2) 1-18.

[10] Zenklusen R. (2010), "Network flow interdiction on planar graphs". *Discrete Applied Mathematics,* 158 (1) 1441-1455.